Magische Rechtecke

1	36	37	72	73	108	109	144	145	180	190	207	226	243	262	279	298	315	334	351
360	325	324	289	288	253	252	217	216	181	171	154	135	118	99	82	63	46	27	10
2	35	38	71	74	107	110	143	146	179	191	206	227	242	263	278	299	314	335	350
359	326	323	290	287	254	251	218	215	182	170	155	134	119	98	83	62	47	26	11
3	34	39	70	75	106	111	142	147	178	192	205	228	241	264	277	300	313	336	349
358	327	322	291	286	255	250	219	214	183	169	156	133	120	97	84	61	48	25	12
4	33	40	69	76	105	112	141	148	177	193	204	229	240	265	276	301	312	337	348
357	328	321	292	285	256	249	220	213	184	168	157	132	121	96	85	60	49	24	13
5	32	41	68	77	104	113	140	149	176	194	203	230	239	266	275	302	311	338	347
356	329	320	293	284	257	248	221	212	185	167	158	131	122	95	86	59	50	23	14
6	31	42	67	78	103	114	139	150	175	195	202	231	238	267	274	303	310	339	346
355	330	319	294	283	258	247	222	211	186	166	159	130	123	94	87	58	51	22	15
7	30	43	66	79	102	115	138	151	174	196	201	232	237	268	273	304	309	340	345
354	331	318	295	282	259	246	223	210	187	165	160	129	124	93	88	57	52	21	16
8	29	44	65	80	101	116	137	152	173	197	200	233	236	269	272	305	308	341	344
353	332	317	296	281	260	245	224	209	188	164	161	128	125	92	89	56	53	20	17
9	28	45	64	81	100	117	136	153	172	198	199	234	235	270	271	306	307	342	343
352	333	316	297	280	261	244	225	208	189	163	162	127	126	91	90	55	54	19	18

Holger Danielsson

Version 0.91 vom 16.11.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Magische Rechtecke

Ein magisches Rechteck ist eine Anordnung der Zahlen von 1 bis mn in einem Rechteck mit m Zeilen und n Spalten, sodass die Summe Z aller Zahlen in den Zeilen ebenso gleich ist wie die Summe S der Zahlen in den Spalten. Da für die Summe der ersten mn natürlichen Zahlen

$$\frac{mn \cdot (mn+1)}{2}$$

gilt, folgt für die Zeilen- und Spaltensumme

$$Z = n \cdot \frac{mn+1}{2} \qquad S = m \cdot \frac{mn+1}{2}$$

Wenn das Produkt mn gerade ist, folgt, dass $mn+1$ ungerade ist. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Zeilen und Spalten beide gerade sein müssen, damit bei der Division durch 2 keine Dezimalzahl entsteht.

Ist das Produkt mn allerdings ungerade, sind sowohl m als auch n ungerade. In diesem Fall ist aber $mn+1$ gerade und die beiden Terme ergeben bei der Division wieder eine ganze Zahl. Daraus folgt, dass bei einem magischen Rechteck die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Eine andere Konstellation ist unmöglich.

Mathematisch lässt sich diese Tatsache folgendermaßen formulieren:

Ein magisches Rechteck $R(m,n)$ existiert genau dann, wenn $m,n > 1$, $mn > 4$ und $m \equiv n$ (modulo 2) gilt.

Zwei Beispiele von magischen Rechtecken $R_1(3,5)$ und $R_2(4,8)$ sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

5	7	4	10	14	40
13	15	8	3	1	40
6	2	12	11	9	40
24	24	24	24	24	

a) $R_1(3,5)$

16	17	12	21	8	25	4	29	132
18	15	22	11	26	7	30	3	132
19	14	23	10	27	6	31	2	132
13	20	9	24	5	28	1	32	132
66	66	66	66	66	66	66	66	

b) $R_2(4,8)$

Abb. 1.1: Magische Rechtecke der Größen 3 x 5 und 4 x 8

Da die Autoren der hier besprochenen Originalartikel vielfach Matrizen benutzen, folgen sie der üblichen mathematischen Bezeichnung und legen die linke obere Ecke mit (1, 1) fest. Daher wird in diesem Buch diesen Bezeichnungen gefolgt und das Koordinatensystem für die Rechtecke entsprechend angepasst. Die linke obere Ecke hat damit die Koordinaten (1, 1), die Spalten j werden von links nach rechts mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet und ebenso die Zeilen i von oben nach unten.

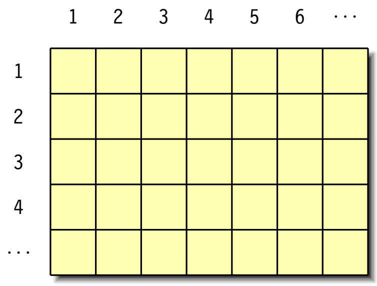


Abb. 1.2: Benutztes Koordinatensystem

Bei magischen Rechtecken kann man die Zeilen und Spalten unabhängig voneinander beliebig permutieren, ohne dass die magische Eigenschaft verloren geht. In Abbildung 1.3 werden beispielsweise die beiden magischen Rechtecke $R'_1(3,5)$ und $R'_2(4,8)$ dargestellt, die aus Permutationen der beiden Rechtecke aus Abbildung 1.1 entstanden sind.

	1	4	5	3	2
2	13	3	1	8	15
3	6	11	9	12	2
1	5	10	14	4	7

a) $R'_1(3,5)$

	8	7	2	1	5	6	3	4
4	32	1	20	13	5	28	9	24
1	29	4	17	16	8	25	12	21
3	2	31	14	19	27	6	23	10
2	3	30	15	18	26	7	22	11

b) $R'_2(4,8)$

Abb. 1.3: Magische Rechtecke mit permutierten Zeilen und Spalten

2 Rechtecke der Größe 2p x 2q

2.1 Trenkler - Rechtecke der Größe 2 x 2k

Seit mindestens 1000 Jahren ist bekannt, wie man magische Rechtecke mit zwei Zeilen erstellt. Verschiedene arabische Autoren aus dieser Zeit haben diese Technik zur Konstruktion von magischen Quadraten benutzt.

Marian Trenkler beweist in einem Artikel, dass magische Rechtecke $R(2, 2k)$ für alle $k > 1$ existieren.[1] Die Zahlen $1, 2, \ldots, 2k$ werden von links nach rechts in die obere Zeile eines solchen Rechteckes platziert und die Zahlen $4k, 4k-1, \ldots, 2k+1$ in die Zeile darunter.

1	2	3	$\cdots$	$2k-1$	$2k$
$4k$	$4k-1$	$4k-2$	$\cdots$	$2k+2$	$2k+1$

Abb. 2.1: Anordnung der Zahlen

Damit stimmen die Spaltensummen überein, allerdings noch nicht die Zeilensummen. Ist k gerade, werden die Zahlen genau dann in den Spalten j vertauscht, wenn $j \equiv 2$ oder $j \equiv 3$ (modulo 4) ist.

1	2	3	4
1	7	6	4
8	2	3	5

a) 2 x 4 - Rechteck

1	2	3	4	5	6	7	8
1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

b) 2 x 8 - Rechteck

Abb. 2.2: Magische Rechtecke 2 x 4k

Es gibt auch noch eine andere Anordnung, die zu einem magischen Rechteck mit dieser Größe führt. Dazu vertauscht man einfach die Zahlen in den mittleren $2k$ Spalten.

1	2	14	13	12	11	7	8
16	15	3	4	5	6	10	9

Abb. 2.3: Variante beim Vertauschen

Ist k dagegen ungerade, geht man prinzipiell genau so vor, nur werden in den letzten sechs Spalten die Zahlen in der ersten und dritten Spalte dieses Blocks vertauscht.

[1] Trenkler [23]

1	2	3	4	5	6
12	2	10	4	5	6
1	11	3	9	8	7

a) 2 x 6 - Rechteck

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	19	18	4	16	6	14	8	9	10
20	2	3	17	5	15	7	13	12	11

Block 1 Block 2

b) 2 x 10 - Rechteck

Abb. 2.4: Magische Rechtecke 2 x 4k+2

Hat das Rechteck noch mehr Spalten, kann man die vorgestellten Varianten auch beliebig miteinander mischen, wie man am Beispiel eines Rechteckes mit 16 Spalten sieht.

1	31	30	4	5	27	26	8	9	10	22	21	20	19	15	16
32	2	3	29	28	6	7	25	24	23	11	12	13	14	18	17

Block 1 Block 2 Block 3

Abb. 2.5: Variationen beim Vertauschen

Selbstverständlich bleiben alle Rechtecke auch magisch, wenn man die Zeilen und Spalten der einzelnen Teilblöcke unabhängig voneinander permutiert.

2.2 Harmuth

T. Harmuth hat vier systematische Methoden beschrieben, um magische Rechtecke $R(m,n)$ zu erzeugen, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten gerade und mindestens eine der beiden Zahlen ein Vielfaches von 4 ist.[2] Allerdings gibt Harmuth nur Beispiele für die Größe 8 x 8 an und spricht dabei auch von magischen Quadraten, wobei die Diagonalen nicht beachtet werden.

Daher sei auch ein Artikel von Phillips erwähnt, der einen zusammenfassenden Überblick gibt, bei welchen Größen von Rechtecken die einzelnen Methoden angewendet werden können.[3]

- Methode 1 und 2: die Anzahl der Spalten ist ein Vielfaches von 4
- Methode 3 und 4: die Anzahl der Zeilen ist ein Vielfaches von 4
- wenn sowohl die Anzahl der Zeilen als auch der Spalten ein Vielfaches von 4, können alle vier Methoden benutzt werden

Methode 1

Diese Methode funktioniert immer dann, wenn die Anzahl der Spalten mit $n = 4k$ ein Vielfaches von 4 ist. Bei einem Rechteck der Größe 6 x 8 werden in der ersten Spalte $\frac{m}{2} = 3$ ungerade Zahlen ab 1 von oben nach unten eingetragen, wobei jedes Mal die nachfolgende Zeile freigelassen wird. Die geraden Zahlen werden dagegen in die horizontal symmetrische Spalte am rechten Rand eingetragen, wobei hier in der zweiten Zeile von oben begonnen wird.

2 Harmuth [11]
3 Phillips [16]

Genau umgekehrt geht man bei den noch freien Zellen in diesen Spalten vor. In der linken Spalte werden die größten Zahlen ab $mn = 48$ abwärts und von oben nach unten in die noch freien Zellen eingetragen. In der rechten Spalte dagegen die ungeraden Zahlen ab $mn - 1 = 47$ abwärts.

1							
							2
3							
							4
5							
							6

1							47
48							2
3							45
46							4
5							43
44							6

Abb. 2.6: Füllen der beiden äußeren Spalten

Für die nächsten beiden Spalten wird abweichend vorgegangen. Man beginnt in der unteren Zeile der vorletzten Spalte und trägt die nächsten noch nicht eingetragenen ungeraden Zahlen ab 7 von unten nach oben ein, wobei wie immer eine Zeile übersprungen wird. Dann folgen die geraden Zahlen in der zweiten Spalte, bei der man in der zweiten Zeile von unten beginnt.

Die nächsten noch nicht benutzten großen geraden Zahlen werden ab 42 abwärts in der vorletzten Spalte von unten nach oben in die noch freien Zellen eingetragen. Ebenso trägt man die entsprechenden ungeraden Zahl ab 41 abwärts und von unten nach oben in die zweite Spalte ein.

1	12						47
48						11	2
3	10						45
46						9	4
5	8						43
44						7	6

1	12					38	47
48	37					11	2
3	10					40	45
46	39					9	4
5	8					42	43
44	41					7	6

Abb. 2.7: Füllen der beiden benachbarten Spalten

So fährt man immer abwechselnd fort, bis das magische Rechteck erzeugt wird, das in Abbildung 2.8 dargestellt ist.

1	12	13	24	26	35	38	47
48	37	36	25	23	14	11	2
3	10	15	22	28	33	40	45
46	39	34	27	21	16	9	4
5	8	17	20	30	31	42	43
44	41	32	29	19	18	7	6

Abb. 2.8: Methode 1 - magisches Rechteck der Größe 6 x 8 (Harmuth)

Um diese Methode besser zu verstehen, wird in Abbildung 2.9 noch ein magisches Rechteck der Größe 10 x 12 dargestellt.

1	20	21	40	41	60	62	79	82	99	102	119
120	101	100	81	80	61	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	64	77	84	97	104	117
118	103	98	83	78	63	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	66	75	86	95	106	115
116	105	96	85	76	65	55	46	35	26	15	6
7	14	27	34	47	54	68	73	88	93	108	113
114	107	94	87	74	67	53	48	33	28	13	8
9	12	29	32	49	52	70	71	90	91	110	111
112	109	92	89	72	69	51	50	31	30	11	10

Abb. 2.9: Methode 1 - magisches Rechteck der Größe 10 × 12 (Harmuth)

Methode 2

Auch bei dieser Methode muss die Anzahl der Spalten mit $n = 4k$ ein Vielfaches von 4 sein. Diese Methode ähnelt der ersten Methode. Hier wird allerdings beim Eintragen der Zahlen nicht mehr zwischen geraden und ungeraden Zahlen unterschieden, sondern es werden immer fortlaufende Zahlen gewählt.

Bei einem Rechteck der Größe 6 × 8 werden wieder die ersten $\frac{m}{2} = 3$ Zahlen von oben nach unten in die linke Spalte eingetragen, wobei wie immer eine Zeile übersprungen wird. Dann folgen die nächsten Zahlen in der rechten Spalte, bei der wieder in der zweiten Zeile begonnen wird. Danach folgen die großen Zahlen ab $mn = 48$ abwärts und von oben nach unten in der linken Spalte, wobei die Zahlen mit jedem Schritt vermindert werden. Ebenso werden die noch freien Zellen in der rechten Spalte mit den nächsten Zahlen ab 45 aufgefüllt.

1							
							4
2							
							5
3							
							6

1							45
48							4
2							44
47							5
3							43
46							6

Abb. 2.10: Füllen der beiden äußeren Spalten

Für die nächsten beiden Spalten wird wie bei Methode 1 wieder abweichend vorgegangen. Man beginnt in der unteren Zeile der vorletzten Spalte und trägt die nächsten noch nicht benutzten Zahlen ab 7 von unten nach oben ein, wobei wie immer eine Zeile übersprungen wird. Dann folgen die nächsten Zahlen ab 10 in der zweiten Spalte, bei der man in der zweiten Zeile von unten beginnt.

Danach werden die nächsten noch nicht benutzen großen Zahlen eingetragen, wobei man bei der größten dieser Zahlen mit 42 beginnt und die nachfolgenden Zahlen immer vermindert. Man beginnt in der vorletzten Spalte und trägt die Zahlen von unten nach oben in die noch leeren Zellen ein. Ebenso verfährt man mit den Zahlen ab 39 in der zweiten Spalte.

1	12						45
48						9	4
2	11						44
47						8	5
3	10						43
46						7	6

1	12					40	45
48	37					9	4
2	11					41	44
47	38					8	5
3	10					42	43
46	39					7	6

Abb. 2.11: Füllen der beiden benachbarten Spalten

Dieses Schema wird immer weiter fortgeführt, bis das magische Rechteck aus Abbildung 2.12 entstanden ist.

1	12	13	24	28	33	40	45
48	37	36	25	21	16	9	4
2	11	14	23	29	32	41	44
47	38	35	26	20	17	8	5
3	10	15	22	30	31	42	43
46	39	34	27	19	18	7	6

Abb. 2.12: Methode 2 - magisches Rechteck der Größe 6 x 8 (Harmuth)

Als zweites Beispiel sei noch ein magisches Rechteck der Größe 10 x 12 angegeben, das auch mit dieser Methode konstruiert wurde und in Abbildung 2.13 dargestellt ist.

1	20	21	40	41	60	66	75	86	95	106	115
120	101	100	81	80	61	55	46	35	26	15	6
2	19	22	39	42	59	67	74	87	94	107	114
119	102	99	82	79	62	54	47	34	27	14	7
3	18	23	38	43	58	68	73	88	93	108	113
118	103	98	83	78	63	53	48	33	28	13	8
4	17	24	37	44	57	69	72	89	92	109	112
117	104	97	84	77	64	52	49	32	29	12	9
5	16	25	36	45	56	70	71	90	91	110	111
116	105	96	85	76	65	51	50	31	30	11	10

Abb. 2.13: Methode 2 - magisches Rechteck der Größe 10 x 12 (Harmuth)

Die mit dieser Methode erzeugten magische Rechtecke sind immer konzentrisch, wobei sich diese Eigenschaft hier immer auf einen Doppelrahmen bezieht. In dem magischen Rechteck aus Abbildung 2.14 sind drei weitere magische Rechtecke der Größen 10 x 12, 6 x 8 und 2 x 4 eingebettet. Die Zeilensummen der Rechtecke betragen 1800, 1350, 900 und 450 und die Spaltensummen 1575, 1125, 675 und 225.

1	28	29	56	57	84	85	112	120	133	148	161	176	189	204	217
224	197	196	169	168	141	140	113	105	92	77	64	49	36	21	8
2	27	30	55	58	83	86	111	121	132	149	160	177	188	205	216
223	198	195	170	167	142	139	114	104	93	76	65	48	37	20	9
3	26	31	54	59	82	87	110	122	131	150	159	178	187	206	215
222	199	194	171	166	143	138	115	103	94	75	66	47	38	19	10
4	25	32	53	60	81	88	109	123	130	151	158	179	186	207	214
221	200	193	172	165	144	137	116	102	95	74	67	46	39	18	11
5	24	33	52	61	80	89	108	124	129	152	157	180	185	208	213
220	201	192	173	164	145	136	117	101	96	73	68	45	40	17	12
6	23	34	51	62	79	90	107	125	128	153	156	181	184	209	212
219	202	191	174	163	146	135	118	100	97	72	69	44	41	16	13
7	22	35	50	63	78	91	106	126	127	154	155	182	183	210	211
218	203	190	175	162	147	134	119	99	98	71	70	43	42	15	14

Abb. 2.14: Methode 2 - konzentrisches magisches Rechteck 14 x 16 (Harmuth)

Methode 3

Diese Methode kann bei einem Rechteck $R(m, n)$ angewendet werden, wenn die Anzahl der Zeilen mit $m = 4k$ ein Vielfaches von 4 ist. Man beginnt bei einem Rechteck der Größe 8 x 10, indem man die m ungeraden Zahlen ab 1 von oben nach unten in die beiden äußeren Spalten einträgt. Die ersten $\frac{m}{4} = 2$ Zahlen in die linke Spalte, gefolgt von $\frac{m}{2} = 4$ Zahlen in der rechten Spalte. Den Abschluss bilden weitere $\frac{m}{4}$ Zahlen, wieder in der linken Spalte. Danach folgen wie in Abbildung 15a entsprechend die geraden Zahlen in den beiden Nachbarspalten.

Nun folgen, wie in Abbildung 15b zu sehen ist, die geraden Zahlen ab $mn = 80$ abwärts. Zuerst also wieder $\frac{m}{4}$ Zahlen von oben nach unten in der rechten Spalte, gefolgt von $\frac{m}{2}$ Zahlen in der linken und abschließend wieder $\frac{m}{4}$ Zahlen in der rechten Spalte. Die ungeraden Zahlen ab $mn - 1 = 79$ werden entsprechend eingetragen, nur beginnt man oben in der vorletzten Spalte.

1	2								
3	4								
								6	5
								8	7
								10	9
								12	11
13	14								
15	16								

a) Eintragen der kleineren Zahlen

1	2							79	80
3	4							77	78
76	75							6	5
74	73							8	7
72	71							10	9
70	69							12	11
13	14							67	68
15	16							65	66

b) Eintragen der kleineren Zahlen

Abb. 2.15: Eintragen der Zahlen in die beiden äußeren Spalten

So fährt man mit den nächsten Spalten fort, wobei in den Spalten immer mit der kleinsten bzw. größten Zahlen begonnen wird, die noch nicht eingetragen wurden. Da bis jetzt bereits 16 Zahlen eingetragen wurden, beginnt man bei den nächsten Spalten mit 17 bei den ungeraden und mit 18 bei den geraden Zahlen. Entsprechend lauten die beiden großen Zahlen 48 bzw. 47.

1	2	17	18					79	80
3	4	19	20					77	78
76	75					22	21	6	5
74	73					24	23	8	7
72	71					26	25	10	9
70	69					28	27	12	11
13	14	29	30					67	68
15	16	31	32					65	66

1	2	17	18			63	64	79	80
3	4	19	20			61	62	77	78
76	75	60	59			22	21	6	5
74	73	58	57			24	23	8	7
72	71	56	55			26	25	10	9
70	69	54	53			28	27	12	11
13	14	29	30			51	52	67	68
15	16	31	32			49	50	65	66

Abb. 2.16: Füllen der nächsten vier Spalten

Jetzt ist das Rechteck entweder bereits vollständig gefüllt, oder es verbleiben wie in diesem Beispiel noch zwei leere Spalten. Da nur noch die mittleren $2m = 16$ Zahlen verbleiben, können diese Spalten auch nach dem bisherigen Schema gefüllt werden, allerdings hier ohne die Nachbarspalten. Also die ungeraden Zahlen ab 33 aufwärts und von oben nach unten sowie die geraden Zahlen ab 48 abwärts in die noch freien Zellen. Als Ergebnis erhält man das magische Rechteck aus Abbildung 2.17.

1	2	17	18	33	48	63	64	79	80
3	4	19	20	35	46	61	62	77	78
76	75	60	59	44	37	22	21	6	5
74	73	58	57	42	39	24	23	8	7
72	71	56	55	40	41	26	25	10	9
70	69	54	53	38	43	28	27	12	11
13	14	29	30	45	36	51	52	67	68
15	16	31	32	47	34	49	50	65	66

Abb. 2.17: Methode 3 - magisches Rechteck der Größe 8×10 (Harmuth)

Methode 4

Auch bei dieser Methode muss die Anzahl der Zeilen ein Vielfaches von 4 sein. Das Rechteck wird ähnlich wie bei Methode 3 gefüllt, wobei allerdings die Unterscheidung zwischen den ungeraden und geraden Zahlen entfällt. Stattdessen werden einfach immer die fortlaufenden Zahlen in die entsprechenden Spalten eingetragen. Also werden zunächst in die beiden äußeren Spalten beginnend in der linken oberen Ecke die Zahlen 1 bis 8 eingetragen und von der rechten oberen Ecke ausgehend die Zahlen ab $mn = 80$ abwärts.

1									
2									
									3
									4
									5
									6
7									
8									

1									80
2									79
78									3
77									4
76									5
75									6
7									74
8									73

Abb. 2.18: Füllen der beiden äußeren Spalten

Der nächste Durchgang beginnt dann mit der Zahl 9 in der oberen Zeile der zweiten Spalte und der Zahl 72 ab der rechten oberen Ecke abwärts.

1	9								80
2	10								79
78								11	3
77								12	4
76								13	5
75								14	6
7	15								74
8	16								73

1	9							72	80
2	10							71	79
78	70							11	3
77	69							12	4
76	68							13	5
75	67							14	6
7	15							66	74
8	16							65	73

Abb. 2.19: Füllen der beiden benachbarten Spalten

Zum Schluss bleiben noch zwei Spalten frei, die entsprechend gefüllt werden. Damit ist das magische Rechteck erzeugt worden, dass in Abbildung 2.20 dargestellt ist.

1	9	17	25	33	48	56	64	72	80
2	10	18	26	34	47	55	63	71	79
78	70	62	54	46	35	27	19	11	3
77	69	61	53	45	36	28	20	12	4
76	68	60	52	44	37	29	21	13	5
75	67	59	51	43	38	30	22	14	6
7	15	23	31	39	42	50	58	66	74
8	16	24	32	40	41	49	57	65	73

Abb. 2.20: Methode 4 - magisches Rechteck der Größe 8 x 10 (Harmuth)

Beispiel 8x12

Sind die Anzahl der Zeilen und Spalten beide Vielfache von 4, können alle vier Methoden angewendet werden. Im ersten Beispiel wird ein magisches Rechteck der Größe 8 x 12 mit Methode 1 erzeugt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.21 dargestellt.

1	16	17	32	33	48	50	63	66	79	82	95
96	81	80	65	64	49	47	34	31	18	15	2
3	14	19	30	35	46	52	61	68	77	84	93
94	83	78	67	62	51	45	36	29	20	13	4
5	12	21	28	37	44	54	59	70	75	86	91
92	85	76	69	60	53	43	38	27	22	11	6
7	10	23	26	39	42	56	57	72	73	88	89
90	87	74	71	58	55	41	40	25	24	9	8

Abb. 2.21: Methode 1 - magisches Rechteck der Größe 8 x 12 (Harmuth)

Ein zweites magisches Rechteck dieser Größe wurde mit Methode 3 erzeugt. Dieses Rechteck ist in Abbildung 2.22 zu sehen.

1	2	17	18	33	34	63	64	79	80	95	96
3	4	19	20	35	36	61	62	77	78	93	94
92	91	76	75	60	59	38	37	22	21	6	5
90	89	74	73	58	57	40	39	24	23	8	7
88	87	72	71	56	55	42	41	26	25	10	9
86	85	70	69	54	53	44	43	28	27	12	11
13	14	29	30	45	46	51	52	67	68	83	84
15	16	31	32	47	48	49	50	65	66	81	82

Abb. 2.22: Methode 3 - magisches Rechteck der Größe 8 x 12 (Harmuth)

2.3 Phillips

J. P. N. Phillips hat ein Verfahren entwickelt, mit dem sich magische Rechtecke $R(m, n)$ erzeugen lassen, wenn die Anzahl der Zeilen und der Spalten gerade ist. Dabei muss aber mindestens eine der beiden Zahlen durch vier teilbar sein.[4]

Sein Verfahren soll zunächst für ein Rechteck der Größe 4 x 10 verdeutlicht werden, da die hier gewählte Zeilenanzahl 4 für spätere Erweiterungen auf größere Rechtecke wichtig ist. Phillips beginnt in der linken oberen Ecke und trägt die fortlaufenden Zahlen ab 1 diagonal nach rechts unten ein. Hat man den unteren Rand erreicht, geht es ab der nächsten Spalte diagonal nach rechts oben weiter. Diese Bewegung wechselt sich so lange ab, bis man nach $n = 10$ Zahlen den rechten Rand erreicht hat.

Dort wechselt man die diagonale Bewegung und fährt mit den nächsten n Zahlen in den vertikal symmetrisch liegen Zellen fort. Nach einem solchen Durchgang sind bereits $2n$ Zahlen eingetragen, wobei die letzte Zahl in die linke untere Ecke platziert wurde.

[4] Phillips [17]

1							8	9	
	2					7			10
		3			6				
			4	5					

1			17	16			8	9	
	2	18			15	7			10
	19	3			6	14			11
20			4	5			13	12	

Abb. 2.23: Eintragen der ersten $2n = 20$ Zahlen

Weitere $2n$ Zahlen trägt man ähnlich ein. Die Startzahl lautet $mn + 1 - 2n = 41 - 20 = 21$ und trifft in diesem Spezialfall mit der Nachfolgezahl der zuletzt eingetragenen Zahl überein. Besitzt das Rechteck aber mehr als vier Zeilen, stimmen diese Zahlen nicht mehr überein, wie in zwei nachfolgenden Beispielen mit $m > 4$ zu erkennen ist.

Dieses Mal beginnt man allerdings in der rechten unteren Ecke und bewegt sich zunächst diagonal nach links oben. Damit ist nach diesen zwei Durchgängen das magische Rechteck der Größe 4 x 10 aus Abbildung 2.24 erzeugt worden.

1			17	16	25	24	8	9	
	2	18		26	15	7	23		10
30	19	3	27		6	14		22	11
20	29	28	4	5			13	12	21

1	32	33	17	16	25	24	8	9	40
31	2	18	34	26	15	7	23	39	10
30	19	3	27	35	6	14	38	22	11
20	29	28	4	5	36	37	13	12	21

Abb. 2.24: Magisches Rechteck der Größe 4 x 10 (Phillips)

Beispiel 4x8

Auch bei einem 4 x 8-Rechteck beginnt man entsprechend. Allerdings befindet man sich nach den ersten $n = 8$ Zahlen in der rechten oberen Ecke, sodass man für die vertikal symmetrischen Zellen in der rechten unteren Ecke fortfahren muss. Damit ist das Rechteck R_1 wie in Abbildung 2.25 gefüllt.

1							8
	2					7	
		3			6		
			4	5			

1			13	12			8
	2	14			11	7	
	15	3			6	10	
16			4	5			9

Abb. 2.25: Eintragen der ersten $2n = 16$ Zahlen

Da die rechte untere Ecke jetzt bereits belegt ist, muss man für die nächsten $2n = 16$ Zahlen abweichend vorgehen. Dazu verschiebt man die Zeilen des Rechteckes zyklisch gesehen um zwei Zeilen nach unten.

	15	3			6	10	
16			4	5			9
1			13	12			8
	2	14			11	7	

Abb. 2.26: Verschieben der Zeilen

Nun ist die linke obere Ecke wieder frei und man kann die nächsten Zahlen so eintragen, wie es im ersten Durchgang für das Rechteck R_1 geschehen ist. Damit ist auch für diese Größe ein magisches Rechteck erstellt worden, das in Abbildung 2.27 dargestellt ist.

17	15	3			6	10	24
16	18		4	5		23	9
1		19	13	12	22		8
	2	14	20	21	11	7	

17	15	3	29	28	6	10	24
16	18	30	4	5	27	23	9
1	31	19	13	12	22	26	8
32	2	14	20	21	11	7	25

Abb. 2.27: Magisches Rechteck der Größe 4 x 8 (Phillips)

Beispiel 4x12

Ein weiterer Sonderfall tritt ein, wenn die Anzahl der Spalten ein ungerades Vielfaches von 4 ist, also 12, 20, 28, . . . Hier können die Zeilensummen nicht passend ausgeglichen werden, sodass der Ausgleich anders gewährleistet werden muss.

Man füllt das Rechteck zunächst wie üblich mit zwei Durchgängen. Dabei sind die Zahlen in den vier Spalten am rechten Rand eigentlich unwichtig. Sie werden nur eingetragen, damit in jedem Durchgang $2n$ Zahlen eingetragen werden, die für die Anordnung der Zahlen in den restlichen Spalten wichtig sind. Diese Zahlen am rechten Rand werden später anders angeordnet.

1			21	20			8	9			13
	2	22			19	7			10	14	
	23	3			6	18			15	11	
24			4	5			17	16			12

a) Eintragen der ersten 24 Zahlen

	23	3			6	18			15	11	
24			4	5			17	16			12
1			21	20			8	9			13
	2	22			19	7			10	14	

b) Verschieben der Zeilen

25	23	3	45	44	6	18	32	33	15	11	37
24	26	46	4	5	43	31	17	16	34	38	12
1	47	27	21	20	30	42	8	9	39	35	13
48	2	22	28	29	19	7	41	40	10	14	36

c) Eintragen der restlichen 24 Zahlen

25	23	3	45	44	6	18	32	33	15	11	37
24	26	46	4	5	43	31	17	16	34	38	12
1	47	27	21	20	30	42	8	9	39	35	13
48	2	22	28	29	19	7	41	40	10	14	36

R_8 R_r

d) Ungeeignetes Teilquadrat am rechten Rand

Abb. 2.28: Vorläufiges Eintragen der Zahlen in ein 4 x 12 - Rechteck

Während die linken acht Spalten in Abbildung 28d ein Rechteck R_8 mit den Zeilensummen 196 und den Spaltensummen 98 ergeben, hat das 4 x 4 - Rechteck R_r am rechten Rand unterschiedliche Zeilensummen 100 und 96. Dies liegt daran, dass die vorhandenen Zahlen $9, 10, \ldots, 16$ und $33, 34, \ldots, 40$ bei dieser Anzahl von Spalten nicht geeignet angeordnet wurden.

Nimmt man dagegen etwa das magische Rechteck $R_4(4,4)$ und erhöht die Zahlen, die keiner oder gleich 8 sind um 8 und die anderen Zahlen um 24, erhält man das Rechteck R'_4.

1	11	6	16
12	2	15	5
8	14	3	9
13	7	10	4

9	35	14	40
36	10	39	13
16	38	11	33
37	15	34	12

Abb. 2.29: Rechteck R_4 und geeignetes Rechteck R'_4

Mit dieser Konstruktion enthält das Rechteck R'_4 die gleichen Zahlen wie das ursprüngliche Rechteck R_r am rechten Rand und mit 98 zusätzlich auch gleiche Zeilen- und Spaltensummen. Ersetzt man jetzt die vier Spalten am rechten Rand durch die Spalten von R'_4, erhält man das magische Rechteck aus Abbildung 2.30.

25	23	3	45	44	6	18	32	9	35	14	40
24	26	46	4	5	43	31	17	36	10	39	13
1	47	27	21	20	30	42	8	16	38	11	33
48	2	22	28	29	19	7	41	37	15	34	12

Abb. 2.30: Magisches Rechteck der Größe 4 x 12 (Phillips)

Beispiel 8x10

Ist die Anzahl der Zeilen ein Vielfaches von 4, werden mehrere 4 x n - Rechtecke übereinander in das Zielrechteck eingefügt. Soll also ein 8 x 10 - Rechteck erzeugt werden, konstruiert man zuerst ein 4 x 10 - Rechteck. Die ersten $2n = 20$ Zahlen beginnen mit der Startzahl 1 und werden wie üblich eingetragen. Die Startzahl der zweiten Folge von 20 Zahlen, die in der rechten unteren Ecke beginnt, lautet nun aber $mn + 1 - 2n$, also 61. Nur so ist gewährleistet, dass die Spaltensummen später im Zielrechteck alle gleich sind.

1	72	73	17	16	65	64	8	9	80
71	2	18	74	66	15	7	63	79	10
70	19	3	67	75	6	14	78	62	11
20	69	68	4	5	76	77	13	12	61

Abb. 2.31: Erstes Rechteck der Größe 4 x 10

Jetzt wird ein zweites Rechteck der Größe 4 x 10 konstruiert. Die erste Startzahl aus dem ersten Rechteck vergrößert sich um $2n = 20$ auf 21, während sich die zweite Startzahl um $2n$ von 61 auf 41 verkleinert.

21	52	53	37	36	45	44	28	29	60
51	22	38	54	46	35	27	43	59	30
50	39	23	47	55	26	34	58	42	31
40	49	48	24	25	56	57	33	32	41

Abb. 2.32: Zweites Rechteck der Größe 4 x 10

Die beiden Rechtecke werden jetzt im Zielrechteck übereinander eingetragen. Das hierdurch entstehende magische Rechteck der Größe 8 x 10 ist in Abbildung 2.33 dargestellt.

21	52	53	37	36	45	44	28	29	60
51	22	38	54	46	35	27	43	59	30
50	39	23	47	55	26	34	58	42	31
40	49	48	24	25	56	57	33	32	41
1	72	73	17	16	65	64	8	9	80
71	2	18	74	66	15	7	63	79	10
70	19	3	67	75	6	14	78	62	11
20	69	68	4	5	76	77	13	12	61

Abb. 2.33: Magisches Rechteck der Größe 8 x 10 (Phillips)

Da alle benutzten 4 x 10 - Rechtecke die gleichen Zeilen- und Spaltensummen besitzen, kann man die Zeilen und Spalten dieser Rechtecke unabhängig voneinander beliebig permutieren, um andere magische Rechtecke zu erzeugen.

Beispiel 6x8

Ähnlich geht man vor, wenn die Anzahl der Zeilen kein Vielfaches von 4 ist. Zunächst werden Rechtecke der Größe 4 x n gebildet, die wie im Beispiel der Größe 8 x 10 übereinander in das Zielrechteck eingefügt werden. Für ein 6 x 8 - Rechteck ist nur ein einziges Hilfsrechteck der Größe 4 x 8 erforderlich, das in Abbildung 2.34 dargestellt ist. Als Startzahlen wurden hier 1 und $mn + 1 - 2n = 49 - 16 = 33$ benutzt.

33	15	3	45	44	6	10	40
16	34	46	4	5	43	39	9
1	47	35	13	12	38	42	8
48	2	14	36	37	11	7	41

33	15	3	45	44	6	10	40
16	34	46	4	5	43	39	9
1	47	35	13	12	38	42	8
48	2	14	36	37	11	7	41

Abb. 2.34: Rechteck der Größe 4 x 8

Nun sind nur noch die oberen beiden Zeilen des Zielrechteckes frei und es fehlen die mittleren $2n$ Zahlen $17, 18, \ldots, 32$. Also wird ein magisches 2 x n - Rechteck erzeugt und die Zahlen dieses Rechteckes um den entsprechenden Wert für die benötigten Zahlen erhöht. In diesem Fall wurden alle Zahlen um 16 erhöht, weil im bisher teilweise gefüllten Zielrechteck noch die Zahlen $17, 18, \ldots, 32$ fehlen.

1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

a) Rechteck der Größe 2 x 10

17	31	30	20	21	27	26	24
32	18	19	29	28	22	23	25

b) Rechteck mit erhöhten Zahlen

Fügt man dieses Rechteck in den noch freien Bereich des Zielrechteckes ein, entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 2.35.

17	31	30	20	21	27	26	24
32	18	19	29	28	22	23	25
33	15	3	45	44	6	10	40
16	34	46	4	5	43	39	9
1	47	35	13	12	38	42	8
48	2	14	36	37	11	7	41

Abb. 2.35: Magisches Rechteck der Größe 6×8 (Phillips)

2.4 De Los Reyes - Das - Midha - Vellaisamy

In der Methode von De Los Reyes, Das, Midha und Vellaisamy zur Konstruktion von magischen Rechtecken mit einer geraden Anzahl von Zeilen werden zwei Fälle unterschieden, bei denen immer $m = 2p$ und $n = 2q$ gilt.[5] Im ersten Fall ist mindestens eine der beiden Zahlen p und q gerade. Hier soll davon ausgegangen, dass p gerade ist. Sonst arbeitet man einfach mit der transponierten Matrix und macht diese Transformation bei der Ergebnismatrix wieder rückgängig.

Zunächst werden die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ von oben nach unten in die erste Spalte einer Matrix eingetragen. Dann folgen die Zahlen $m+1, m+2, \ldots, 2m$ von unten nach oben in der zweiten Spalte, gefolgt von $2m+1, 2m+2, \ldots, 3m$ in der dritten Spalte und so fort. Mit diesem System wird die Matrix abwechselnd von oben nach unten und von unten nach oben mit den fortlaufenden Zahlen $1, 2, \ldots, mn$ gefüllt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m+1 & 4m & \ldots \\ 2 & 2m-1 & 2m+2 & 4m-1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m-1 & m+2 & 3m-1 & 3m+2 & \ldots \\ m & m+1 & 3m & 3m+1 & \ldots \end{pmatrix}$$

Eine solche Anordnung nennt man auch eine *Serpentine-Matrix* und ist in Abbildung 2.36 in ein Rechteck übertragen worden.

↓		↓		↓		↓		↓	
1	16	17	32	33	48	49	64	65	80
2	15	18	31	34	47	50	63	66	79
3	14	19	30	35	46	51	62	67	78
4	13	20	29	36	45	52	61	68	77
5	12	21	28	37	44	53	60	69	76
6	11	22	27	38	43	54	59	70	75
7	10	23	26	39	42	55	58	71	74
8	9	24	25	40	41	56	57	72	73
	↑		↑		↑		↑		↑

Abb. 2.36: Rechteck aus einer Serpentine-Matrix

[5] Midha - Das - Midha - Vellaisamy [15]

Kehrt man nun die mittleren p Zeilen um, entsteht aus diesem Rechteck das magische 8 x 10 - Rechteck aus Abbildung 2.37.

1	16	17	32	33	48	49	64	65	80
2	15	18	31	34	47	50	63	66	79
78	67	62	51	46	35	30	19	14	3
77	68	61	52	45	36	29	20	13	4
76	69	60	53	44	37	28	21	12	5
75	70	59	54	43	38	27	22	11	6
7	10	23	26	39	42	55	58	71	74
8	9	24	25	40	41	56	57	72	73

Abb. 2.37: Magisches Rechteck der Größe 8 x 10 (De Los Reyes u.a.)

Beispiel 6x10

Im zweiten Beispiel soll ein magisches Rechteck der Größe 6 x 10 erzeugt werden. In diesem Fall sind sowohl $p = 3$ und $q = 5$ ungerade und die Konstruktion wird etwas umfangreicher. Man beginnt wieder mit der Serpentine-Matrix.

↓		↓		↓		↓		↓	
1	12	13	24	25	36	37	48	49	60
2	11	14	23	26	35	38	47	50	59
3	10	15	22	27	34	39	46	51	58
4	9	16	21	28	33	40	45	52	57
5	8	17	20	29	32	41	44	53	56
6	7	18	19	30	31	42	43	54	55
	↑		↑		↑		↑		↑

Abb. 2.38: Rechteck aus einer Serpentine-Matrix

Danach werden die linken $2 \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor = 4$ Spalten betrachtet. Bei der gewählten Größe handelt es sich um vier Spalten, die umgekehrt werden.

6	7	18	19	25	36	37	48	49	60
5	8	17	20	26	35	38	47	50	59
4	9	16	21	27	34	39	46	51	58
3	10	15	22	28	33	40	45	52	57
2	11	14	23	29	32	41	44	53	56
1	12	13	24	30	31	42	43	54	55

Abb. 2.39: Schritt 2 - Umkehren von Spalten

Im dritten Schritt werden für die Spalten $1 \leq j \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$ beliebige p Zahlen aus der Spalte j mit den Zahlen aus ihrer horizontal symmetrischen Spalte vertauscht. Dabei bleiben die beiden mittleren Spalten aber unverändert. Der Einfachheit halber werden in diesem Beispiel die oberen p Zahlen gewählt.

60	49	48	37	25	36	19	18	7	6
59	50	47	38	26	35	20	17	8	5
58	51	46	39	27	34	21	16	9	4
3	10	15	22	28	33	40	45	52	57
2	11	14	23	29	32	41	44	53	56
1	12	13	24	30	31	42	43	54	55

Abb. 2.40: Schritt 3 - Vertauschen von Zahlen

In Schritt 4 werden danach in den beiden mittleren Spalten die mittleren $p-3$ Zahlen miteinander vertauscht. Allerdings tritt dieser Fall bei diesem Rechteck mit $p = 3$ nicht auf. Im nachfolgenden Beispiel für ein Rechteck der Größe 10 x 14 werden in diesem Schritt dann aber jeweils zwei Zahlen miteinander vertauscht.

Zusätzlich gibt es noch eine zweite Vertauschung in diesen beiden Spalten. Dabei handelt es sich um die Zeilen $t + \frac{p-3}{2}$ für $t = 1$ und $t = 3$. In diesem Beispiel sind dies mit $p = 3$ die Zeilen 1 und 3. Mit diesen Vertauschungen ergibt sich das magische Rechteck der Größe 6 x 10 aus Abbildung 2.41. Die Zeilen- und Spaltensummen dieses Rechteckes betragen 305 bzw. 183.

60	49	48	37	36	25	19	18	7	6
59	50	47	38	26	35	20	17	8	5
58	51	46	39	34	27	21	16	9	4
3	10	15	22	28	33	40	45	52	57
2	11	14	23	29	32	41	44	53	56
1	12	13	24	30	31	42	43	54	55

Abb. 2.41: Magisches Rechteck der Größe 6 x 10 (De Los Reyes u.a.)

Beispiel 10x14

Dieses Verfahren soll noch einmal an einem Rechteck der Größe 10 x 14 veranschaulicht worden, da beim ersten Beispiel wegen der geringeren Größe ein Teilschritt nicht durchgeführt werden musste. Man beginnt wieder wie in Abbildung 2.42 mit dem Rechteck aus einer Serpentine-Matrix.

↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
1	20	21	40	41	60	61	80	81	100	101	120	121	140
2	19	22	39	42	59	62	79	82	99	102	119	122	139
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98	103	118	123	138
4	17	24	37	44	57	64	77	84	97	104	117	124	137
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96	105	116	125	136
6	15	26	35	46	55	66	75	86	95	106	115	126	135
7	14	27	34	47	54	67	74	87	94	107	114	127	134
8	13	28	33	48	53	68	73	88	93	108	113	128	133
9	12	29	32	49	52	69	72	89	92	109	112	129	132
10	11	30	31	50	51	70	71	90	91	110	111	130	131
	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑

Abb. 2.42: Rechteck aus einer Serpentine-Matrix

Danach kehrt man im zweiten Schritt die linken $2 \cdot \lfloor \frac{q}{2} \rfloor = 6$ Spalten um. (siehe Abbildung 2.43)

10	11	30	31	50	51	61	80	81	100	101	120	121	140
9	12	29	32	49	52	62	79	82	99	102	119	122	139
8	13	28	33	48	53	63	78	83	98	103	118	123	138
7	14	27	34	47	54	64	77	84	97	104	117	124	137
6	15	26	35	46	55	65	76	85	96	105	116	125	136
5	16	25	36	45	56	66	75	86	95	106	115	126	135
4	17	24	37	44	57	67	74	87	94	107	114	127	134
3	18	23	38	43	58	68	73	88	93	108	113	128	133
2	19	22	39	42	59	69	72	89	92	109	112	129	132
1	20	21	40	41	60	70	71	90	91	110	111	130	131

Abb. 2.43: Schritt 2 - Umkehren von Spalten

Dann folgt Schritt 3, in dem $p = 5$ Zahlen in den Spalten $1 \leq j \leq 2 \cdot \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ vertauscht werden. (siehe Abbildung 2.44)

140	121	120	101	100	81	61	80	51	50	31	30	11	10
139	122	119	102	99	82	62	79	52	49	32	29	12	9
138	123	118	103	98	83	63	78	53	48	33	28	13	8
137	124	117	104	97	84	64	77	54	47	34	27	14	7
136	125	116	105	96	85	65	76	55	46	35	26	15	6
5	16	25	36	45	56	66	75	86	95	106	115	126	135
4	17	24	37	44	57	67	74	87	94	107	114	127	134
3	18	23	38	43	58	68	73	88	93	108	113	128	133
2	19	22	39	42	59	69	72	89	92	109	112	129	132
1	20	21	40	41	60	70	71	90	91	110	111	130	131

Abb. 2.44: Schritt 3 - Vertauschen von Zahlen

Nun folgt der vierte Schritt, der in dem vorangegangenen Beispiel nicht durchgeführt werden musste. Hier werden jetzt in den beiden mittleren Spalten die mittleren $p-3=2$ Zahlen miteinander vertauscht. (siehe Abbildung 2.45)

140	121	120	101	100	81	61	80	51	50	31	30	11	10
139	122	119	102	99	82	62	79	52	49	32	29	12	9
138	123	118	103	98	83	63	78	53	48	33	28	13	8
137	124	117	104	97	84	64	77	54	47	34	27	14	7
136	125	116	105	96	85	76	65	55	46	35	26	15	6
5	16	25	36	45	56	75	66	86	95	106	115	126	135
4	17	24	37	44	57	67	74	87	94	107	114	127	134
3	18	23	38	43	58	68	73	88	93	108	113	128	133
2	19	22	39	42	59	69	72	89	92	109	112	129	132
1	20	21	40	41	60	70	71	90	91	110	111	130	131

Abb. 2.45: Schritt 4 - Vertauschen von Zahlen in den beiden mittleren Spalten

Mit dem abschließenden Tausch von zwei Zahlenpaaren entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 2.46. Die Zeilen- und Spaltensummen dieses Rechteckes betragen 595 bzw. 255.

140	121	120	101	100	81	61	80	51	50	31	30	11	10
139	122	119	102	99	82	79	62	52	49	32	29	12	9
138	123	118	103	98	83	63	78	53	48	33	28	13	8
137	124	117	104	97	84	77	64	54	47	34	27	14	7
136	125	116	105	96	85	76	65	55	46	35	26	15	6
5	16	25	36	45	56	75	66	86	95	106	115	126	135
4	17	24	37	44	57	67	74	87	94	107	114	127	134
3	18	23	38	43	58	68	73	88	93	108	113	128	133
2	19	22	39	42	59	69	72	89	92	109	112	129	132
1	20	21	40	41	60	70	71	90	91	110	111	130	131

Abb. 2.46: Magisches Rechteck der Größe 10 x 14 (De Los Reyes u.a.)

2.5 Bier - Kleinschmidt

m und n gerade und m ein Vielfaches von 4 (doppelt-gerade)

Die grundlegende Basis für die hier vorgestellten Methoden stellen zentral symmetrische (engl. *centrally symmetric*) Rechtecke dar, dessen Definition von Bier und Kleinschmidt stammt.[6] Ihren sehr theoretischen Artikel reduziere ich hier auf die Punkte, die für die Konstruktion von magischen Rechtecken notwendig sind.

Ein Rechteck R ist *zentral symmetrisch*, wenn die enthaltenen Zahlen alle in der Form $\pm[1, 2, \ldots, x]$ dargestellt werden können und alle Zeilen- und Spaltensummen 0 sind. In ihrer theoretischen Abhandlung beweisen sie, dass ein zentral symmetrisches Rechteck genau dann existiert, wenn es auch ein magisches Rechteck der gleichen Größe gibt.

Für ihre Beweisführung von zentral symmetrischen Rechtecken $C(m, n)$ mit einer geraden Anzahl von Zeilen und Spalten, gehen sie von der Existenz eines solchen Rechteckes $C(4, n)$ aus. Sie geben eine Formel an, mit der ein Rechteck mit vier Zeilen und n Spalten erzeugt werden kann. Mit dem Ursprung $(1, 1)$ in der linken oberen Ecke des Koordinatensystemes definieren sie mit $n = 2s$, $1 \leq i \leq 4$, $j = 2t+r$ und $r \in \{1, 2\}$ die Zahlen des Rechteckes $C(4, n)$.

$$c_{ij} = \begin{cases} -4\,t - i & \text{für } |5 - 2i| = 5 - 2r \\ 4\,t + i & \text{für } [5 - 2i| = 2r - 1 \end{cases}$$

Mit dieser Formel ergibt sich beispielsweise das zentral symmetrische Rechteck $C(4, 6)$. Erhöht man alle positiven Zahlen um 12 und die negativen Zahlen um 13, ergibt sich das magische Rechteck aus Abbildung 2.47 mit den Zeilensummen 75 und den Spaltensummen 50.

[6] Bier - Kleinschmidt [2]

-1	1	-5	5	-9	9
2	-2	6	-6	10	-10
3	-3	7	-7	11	-11
-4	4	-8	8	-12	12

a) $C(4,6)$

12	13	8	17	4	21
14	11	18	7	22	3
15	10	19	6	23	2
9	16	5	20	1	24

b) erhöhte Zahlen

Abb. 2.47: Magisches Rechteck der Größe 4 x 6 (Bier - Kleinschmidt)

Allgemein muss man die positiven Zahlen um $\frac{m \cdot n}{2}$ und die negativen um $\frac{m \cdot n}{2} + 1$ erhöhen. Für das zentral symmetrische Rechteck $C(4,8)$ lauten damit die Erhöhungszahlen 16 und 17. Die beiden Rechtecke sind in Abbildung 2.48 dargestellt. Die Zeilensummen betragen im magischen Rechteck 132 und die Spaltensummen 66.

-1	1	-5	5	-9	9	-13	13
2	-2	6	-6	10	-10	14	-14
3	-3	7	-7	11	-11	15	-15
-4	4	-8	8	-12	12	-16	16

a) $C(4,8)$

16	17	12	21	8	25	4	29
18	15	22	11	26	7	30	3
19	14	23	10	27	6	31	2
13	20	9	24	5	28	1	32

b) erhöhte Zahlen

Abb. 2.48: Magisches Rechteck der Größe 4 x 8 (Bier - Kleinschmidt)

In Abbildung 2.49 ist noch einmal das zentral symmetrische Rechteck $C(4,12)$ mit 12 Spalten dargestellt.

-1	1	-5	5	-9	9	-13	13	-17	17	-21	21
2	-2	6	-6	10	-10	14	-14	18	-18	22	-22
3	-3	7	-7	11	-11	15	-15	19	-19	23	-23
-4	4	-8	8	-12	12	-16	16	-20	20	-24	24

Abb. 2.49: Zentral symmetrisches Rechteck $C(4,12)$

Wandelt man dieses Rechteck wie beschrieben um, entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 2.50 mit den Zeilensummen 294 und den Spaltensummen 98.

24	25	20	29	16	33	12	37	8	41	4	45
26	23	30	19	34	15	38	11	42	7	46	3
27	22	31	18	35	14	39	10	43	6	47	2
21	28	17	32	13	36	9	40	5	44	1	48

Abb. 2.50: Magisches Rechteck der Größe 4 x 12 (Bier - Kleinschmidt)

Dieses Konstruktionsprinzip lässt sich leicht auf Rechtecke ausdehnen, bei denen die Anzahl der Zeilen ein Vielfaches von 4 ist. Dazu müssen die Zahlen in dem zentral symmetrischen Rechteck so erweitert werden, wie es Bier und Kleinschmidt mit ihrer Formel für die vier Zeilen vorgegeben haben. Dabei muss natürlich auch die gleiche Anordnung der Vorzeichen beachtet werden. Für acht Zeilen lautet das Rechteck $C(8, 12)$ damit:

-1	1	-9	9	-17	17	-25	25	-33	33	-41	41
2	-2	10	-10	18	-18	26	-26	34	-34	42	-42
3	-3	11	-11	19	-19	27	-27	35	-35	43	-43
-4	4	-12	12	-20	20	-28	28	-36	36	-44	44
-5	5	-13	13	-21	21	-29	29	-37	37	-45	45
6	-6	14	-14	22	-22	30	-30	38	-38	46	-46
7	-7	15	-15	23	-23	31	-31	39	-39	47	-47
-8	8	-16	16	-24	24	-32	32	-40	40	-48	48

Abb. 2.51: Zentral symmetrisches Rechteck $C(8, 12)$

Um das zugehörige magische Rechteck $R(8, 12)$ aus Abbildung 2.52 zu erhalten, müssen die Zahlen nur noch um $\frac{m \cdot n}{2} = 48$ bzw. $\frac{m \cdot n}{2} + 1 = 49$ erhöht werden. Damit besitzt dieses Rechteck die Zeilensummen 582 und die Spaltensummen 388.

48	49	40	57	32	65	24	73	16	81	8	89
50	47	58	39	66	31	74	23	82	15	90	7
51	46	59	38	67	30	75	22	83	14	91	6
45	52	37	60	29	68	21	76	13	84	5	92
44	53	36	61	28	69	20	77	12	85	4	93
54	43	62	35	70	27	78	19	86	11	94	3
55	42	63	34	71	26	79	18	87	10	95	2
41	56	33	64	25	72	17	80	9	88	1	96

Abb. 2.52: Magisches Rechteck der Größe 8 x 12 (Bier - Kleinschmidt)

m einfach-gerade, n>=4 gerade

Wenn die Anzahl m der Zeilen kein Vielfaches von 4, also einfach-gerade ist, sind einige zusätzliche Schritte erforderlich, um ein magisches Rechteck $R(m, n)$ zu erzeugen. Zunächst wird ein zentral symmetrisches Rechteck $C(m-2, n)$ mit dem bereits beschriebenen Verfahren erzeugt und dann in ein magisches Rechteck $R_1(m-2, n)$ umgewandelt. Für ein Rechteck der Größe 6 x 8 mit $m = 6$ ist das Teilrechteck $R_1(4, 8)$ in Abbildung 2.53 dargestellt.

-1	1	-5	5	-9	9	-13	13
2	-2	6	-6	10	-10	14	-14
3	-3	7	-7	11	-11	15	-15
-4	4	-8	8	-12	12	-16	16

a) $C(4, 8)$

16	17	12	21	8	25	4	29
18	15	22	11	26	7	30	3
19	14	23	10	27	6	31	2
13	20	9	24	5	28	1	32

b) $R_1(4, 8)$

Abb. 2.53: Magisches Teilrechteck der Größe 4 x 8

Danach werden alle Zahlen, die größer als die Mitte $\frac{m \cdot n}{2} = 16$ des bisherigen Rechteckes sind, um die Zahl $2n = 16$ erhöht.

16	33	12	37	8	41	4	45
34	15	38	11	42	7	46	3
35	14	39	10	43	6	47	2
13	36	9	40	5	44	1	48

Abb. 2.54: $R_1(4, 8)$ mit den erhöhten Zahlen

Damit enthält dieses Rechteck nun die Zahlen von 1 bis 16 sowie von 33 bis 48, sodass eine Lücke von den $2n$ Zahlen 17 bis 32 entstanden ist. Daher ist noch ein magisches Hilfsrechteck $R_2(2, n)$ erforderlich, dessen Zahlen jeweils um die Zahl $\frac{m \cdot n}{2} = 16$ erhöht werden, wie es in Abbildung 2.55 dargestellt ist.

1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

a) magisches Rechteck $R_2(2, 8)$

17	31	30	20	21	27	26	24
32	18	19	29	28	22	23	25

b) erhöhte Zahlen

Abb. 2.55: Zweites Teilrechteck $R_2(2, 8)$ mit den erhöhten Zahlen

Fügt man abschließend die beiden Rechtecke $R_1(4, 8)$ und $R_2(2, 8)$ übereinander in das Zielrechteck $R(m, n)$ ein, ist dieses wie in Abbildung 2.56 magisch. Die Zeilensummen betragen 196 und die Spaltensummen 147.

16	33	12	37	8	41	4	45
34	15	38	11	42	7	46	3
35	14	39	10	43	6	47	2
13	36	9	40	5	44	1	48
17	31	30	20	21	27	26	24
32	18	19	29	28	22	23	25

Abb. 2.56: Magisches Rechteck der Größe 6 x 8 (Bier - Kleinschmidt)

2.6 De Los Reyes - Das - Midha

Eine weitere Methode, um magische Rechtecke zu erzeugen, bei denen die Anzahl der Zeilen und Spalten beide gerade sind, stammt von De Los Reyes, Das und Midha.[7] Sie benutzten Matrizen und betten Rechtecke kleinerer Größe in das Zielrechteck ein.

Die Autoren erklären das Konstruktionsverfahren sehr mathematisch mit Matrizen und benutzen zudem häufig das Kronecker-Produkt. Da dieses für Nichtmathematiker schwer verständlich ist, erkläre ich das Verfahren hier einfacher. Die Namen der beteiligten Matrizen lasse ich zum besseren Vergleich allerdings unverändert.

Es sei $m = 2p$ die Anzahl der Zeilen und $n = 2q$ die Anzahl der Spalten. Zuerst definieren sie einige kleine Matrizen:

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich wird eine p x q - Matrix A mit den Zahlen $0, 1, \ldots, pq - 1$ benötigt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & q-1 \\ q & q+1 & q+2 & \ldots & 2q-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (p-1)\,q & (p-1)\,q+1 & (p-1)\,q+2 & \ldots & pq-1 \end{pmatrix}$$

Für ein 6 x 8 - Matrix gilt also $p = 3$ und $q = 4$ und die zugehörige Matrix A lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Aus der p x q - Matrix A wird dann eine 2p x q - Matrix X erzeugt. Die einzelnen Zeilen von A werden von oben nach unten ausgelesen und in die Matrix X übertragen. Direkt unterhalb der übertragenen Zeile werden diese Zahlen aber zusätzlich in umgekehrter Reihenfolge in eine zusätzliche Zeile eingetragen.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix X wird anschließend eine 2p x 2q - Matrix Y erzeugt. Dazu werden die Zahlen von X jeweils mit 4 multipliziert und dann um 1 erhöht. Zusätzlich wird dieses Ergebnis auch in die rechts

[7] Reyes - Das - Midha [19]

daneben liegende Zelle dupliziert. Da dadurch jede Zahl in den Zeilen doppelt auftritt, erhöht sich die Anzahl der Spalten auf $2q$.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 9 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 9 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 17 & 17 & 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 29 \\ 29 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 & 17 & 17 \\ 33 & 33 & 37 & 37 & 41 & 41 & 45 & 45 \\ 45 & 45 & 41 & 41 & 37 & 37 & 33 & 33 \end{pmatrix}$$

Danach wird aus Y eine weitere Matrix C erzeugt, wobei die linke Hälfte der Matrix Y unverändert übernommen wird. In der rechten Hälfte werden die Zahlen dieser Spalten paarweise umgekehrt, wobei ihre relative Anordnung zueinander aber beibehalten wird. Konkret bedeutet dies z.B. für die Spalte am rechten Rand, dass die beiden oberen Zahlen 13 und 1 in genau dieser Reihenfolge am unteren Rand dieser Spalte eingetragen werden. Gleichzeitig wandern die Zahlen 45 und 33 vom unteren an den oberen Rand. Entsprechend verfährt man mit weiteren Gruppen von vier Zahlen, falls diese existieren. Bleiben zum Schluss noch zwei Zahlen über, werden diese nicht verändert.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 41 & 41 & 45 & 45 \\ 13 & 13 & 9 & 9 & 37 & 37 & 33 & 33 \\ 17 & 17 & 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 29 \\ 29 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 & 17 & 17 \\ 33 & 33 & 37 & 37 & 9 & 9 & 13 & 13 \\ 45 & 45 & 41 & 41 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Als Hilfsmatrix wird nun eine Matrix B' mit zwei Zeilen definiert.

$$B' = \begin{cases} \begin{pmatrix} \underbrace{Q \quad Q \quad \cdots \quad Q}_{\frac{q}{2}\ \text{mal}} \end{pmatrix} & \text{wenn } q \text{ gerade ist} \\ \begin{pmatrix} Q_e \quad Q_a \quad \underbrace{Q_b \quad Q_a}_{\frac{q-3}{3}\ \text{mal}} \quad Q_e \end{pmatrix} & \text{wenn } q \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Für $q = 4$ bedeutet dies, dass der obere Fall zutrifft und die Matrix Q mit $\frac{q}{2} = 2$ genau zweimal aneinander gefügt wird. Damit hat die Matrix B' folgendes Aussehen:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ \underbrace{3 & 0 & 2 & 1}_{Q} & \underbrace{3 & 0 & 2 & 1}_{Q} \end{pmatrix}$$

Setzt man B' jetzt $p = 3$ -mal übereinander, erhält man die eigentlich gewünschte Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiert man abschließend komponentenweise die Zahlen aus den Matrizen B und C, entsteht das magische Rechteck $R(6, 8)$ aus Abbildung 2.57 mit den Zeilensummen 196 und Spaltensummen 147.

1	4	6	7	41	44	46	47
16	13	11	10	40	37	35	34
17	20	22	23	25	28	30	31
32	29	27	26	24	21	19	18
33	36	38	39	9	12	14	15
48	45	43	42	8	5	3	2

Abb. 2.57: Magisches Rechteck der Größe 6 x 8 (De Los Reyes - Das - Midha)

Beispiel 8x10

Als weiteres Beispiel soll das magische Rechteck $R(8, 10)$ konstruiert werden. Mit $p = 4$ und $q = 5$ erhält man folgende Hilfsmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 18 & 17 & 16 & 15 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 913 & 13 & 17 & 17 \\ 17 & 17 & 13 & 13 & 9 & 95 & 5 & 1 & 1 \\ 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 2933 & 33 & 37 & 37 \\ 37 & 37 & 33 & 33 & 29 & 2925 & 25 & 21 & 21 \\ 41 & 41 & 45 & 45 & 49 & 4953 & 53 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 53 & 53 & 49 & 4945 & 45 & 41 & 41 \\ 61 & 61 & 65 & 65 & 69 & 6973 & 73 & 77 & 77 \\ 77 & 77 & 73 & 73 & 69 & 6965 & 65 & 61 & 61 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 9 & 69 & 73 & 73 & 77 & 77 \\ 17 & 17 & 13 & 13 & 9 & 69 & 65 & 65 & 61 & 61 \\ 21 & 21 & 25 & 25 & 29 & 49 & 53 & 53 & 57 & 57 \\ 37 & 37 & 33 & 33 & 29 & 49 & 45 & 45 & 41 & 41 \\ 41 & 41 & 45 & 45 & 49 & 29 & 33 & 33 & 37 & 37 \\ 57 & 57 & 53 & 53 & 49 & 29 & 25 & 25 & 21 & 21 \\ 61 & 61 & 65 & 65 & 69 & 9 & 13 & 13 & 17 & 17 \\ 77 & 77 & 73 & 73 & 69 & 9 & 5 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da q in diesem Beispiel ungerade ist, wird die Matrix B' hier anders erzeugt.

$$B' = \begin{pmatrix} Q_e & Q_a & \underbrace{Q_b \quad Q_a}_{\frac{q-3}{3}\ \text{mal}} & Q_e \end{pmatrix}$$

Mit $\frac{q-3}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$ werden die beiden Matrizen Q_b und Q_a also nur ein einziges Mal in die Matrix B' eingefügt, die damit folgendes Aussehen hat.

$$B' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}}_{Q_e} & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{Q_a} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{Q_b} & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{Q_a} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}}_{Q_e} \end{pmatrix}$$

Wie im Beispiel des Rechteckes der Größe 6 x 8 wird B' nun p mal übereinander in die Matrix B eingefügt.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Abschließend werden die Matrizen B und C wieder addiert und man erhält das magische Rechteck $R(8, 10)$ aus Abbildung 2.58. Die Zeilensummen betragen 405 und die Spaltensummen 324.

1	3	7	8	9	70	75	76	77	79
20	18	14	13	12	71	66	65	64	62
21	23	27	28	29	50	55	56	57	59
40	38	34	33	32	51	46	45	44	42
41	43	47	48	49	30	35	36	37	39
60	58	54	53	52	31	26	25	24	22
61	63	67	68	69	10	15	16	17	19
80	78	74	73	72	11	6	5	4	2

Abb. 2.58: Magisches Rechteck der Größe 8 x 10 (De Los Reyes - Das - Midha)

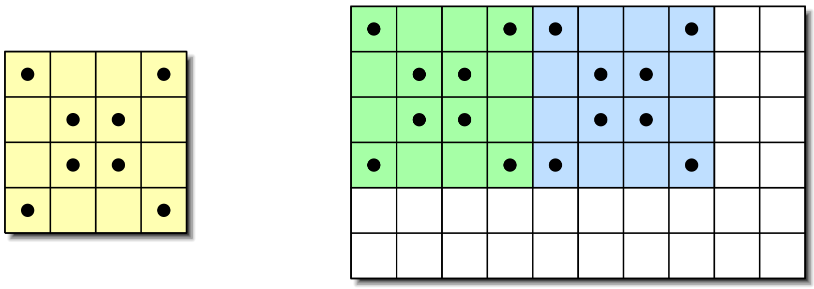
2.7 Diagonalenmethode

Eine andere Möglichkeit magische Rechtecke zu erzeugen, besteht darin, Verfahren zur Konstruktion doppelt-gerader magischer Quadrate abzuändern. Dies funktioniert natürlich nur bei einigen wenigen Verfahren, wie z.B. der Diagonalenmethode, welches sehr einfach übertragen werden kann.[8]

[8] Danielsson [5] s. Kapitel 5.1.1

Die Diagonalenmethode geht auf einen unbekannten Verfasser aus dem arabischen Raum zurück, der im 12. Jahrhundert eine Abhandlung über magische Quadrate verfasste.[9] Dabei stellte er auch die von ihm erstellte Diagonalenmethode vor, weil er sie für wesentlich einfacher hielt als andere damals bekannte Verfahren. Dieses Verfahren wird auch im Werk von Moschopoulos über magische Quadrate aus dem arabischen Raum beschrieben.[10]

Es wird zunächst ein Basismuster der Größe 4×4 erzeugt, dessen Diagonalen Markierungen enthalten. Wenn man das Zielrechteck nicht vollständig in 4×4 - Teilquadrate unterteilen kann, werden am unteren bzw. rechten Rand zwei Zeilen bzw. Spalten zunächst abgetrennt. Danach kopiert man wie in Abbildung 2.59 das Basismuster in alle 4×4 - Teilquadrate hinein. Die abgetrennten Zeilen und Spalten werden zunächst nicht beachtet.



a) Basismuster b) reduziertes 4×8 - Rechteck

Abb. 2.59: Markierte Teilquadrate der Größe 4 für das Zielrechteck $R(6, 8)$

Das verkleinerte Rechteck $R_1(m_1, n_1) = R_1(4, 8)$ wird zunächst mit den Zahlen von 1 bis $m_1 \cdot n_1 = 4 \cdot 8 = 32$ in natürlicher Anordnung gefüllt. Links oben mit 1 beginnend werden die weiteren Zahlen fortlaufend von links nach rechts und von oben nach unten in das Quadrat geschrieben. Abschließend werden alle Zahlen z, die auf nicht markierten Feldern liegen, durch ihr Komplement ersetzt.

$$z \longmapsto m_1 \cdot n_1 + 1 - z \qquad z \longmapsto 33 - z$$

Damit ist das magische Rechteck der Größe 4×8 aus Abbildung 2.60 erzeugt worden.

1	2	3	4	5	6	7	8		
9	10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	21	22	23	24		
25	26	27	28	29	30	31	32		

a) natürliche Ordnung

1	31	30	4	5	27	26	8		
24	10	11	21	20	14	15	17		
16	18	19	13	12	22	23	9		
25	7	6	28	29	3	2	32		

b) Übergang zu den komplementären Zahlen

Abb. 2.60: Magisches Rechteck $R_1(4, 8)$

[9] Sesiano [21] S. 43 – 45 und Sesiano [20] S. 188-192
[10] Tannery [22]

Um dieses Rechteck um zwei Zeilen zu erweitern, werden alle Zahlen, die größer als die Mitte $\frac{m_1 \cdot n_1}{2} = 16$ der bereits vorhandenen Zahlen sind, um den Wert $2\,n_1 = 16$ erhöht. Damit entsteht eine Lücke von 16 Zahlen, die mit den noch fehlenden Zahlen gefüllt wird.

1	47	46	4	5	43	42	8		
40	10	11	37	36	14	15	33		
16	34	35	13	12	38	39	9		
41	7	6	44	45	3	2	48		

Abb. 2.61: Rechteck $R_1(4, 8)$ mit einigen um 16 erhöhten Zahlen

Dazu erzeugt man ein Rechteck $R'_1(2, n_1)$ und erhöht dann alle Zahlen um $2\,n_1 = 16$.

1	15	14	4	5	11	10	8
16	2	3	13	12	6	7	9

a) Rechteck $R'_1(2, n_1)$

17	31	30	20	21	27	26	24
32	18	19	29	28	22	23	25

b) um 16 erhöhte Zahlen

Abb. 2.62: Magisches Rechteck $R'_1(2, 8)$

Die zwei Zeilen vom Rechteck $R'_1(2, 8)$ können jetzt irgendwo an das Rechteck $R_1(4, 8)$ angefügt werden, sodass das magische Rechteck $R_2(6, 8)$ aus Abbildung 2.63 entsteht.

1	47	46	4	5	43	42	8		
40	10	11	37	36	14	15	33		
16	34	35	13	12	38	39	9		
41	7	6	44	45	3	2	48		
17	31	30	20	21	27	26	24		
32	18	19	29	28	22	23	25		

Abb. 2.63: Magisches Rechteck $R_2(6, 8)$

Jetzt muss das Rechteck nur noch um zwei Spalten erweitert werden. Dabei geht man genauso wie beim Erweitern um zwei Zeilen vor.

1	59	58	4	5	55	54	8		
52	10	11	49	48	14	15	45		
16	46	47	13	12	50	51	9		
53	7	6	56	57	3	2	60		
17	43	42	20	21	39	38	24		
44	18	19	41	40	22	23	37		

a) $R_2(6, 8)$: teilweise erhöhte Zahlen

12	1
2	11
10	3
4	9
5	8
6	7

b) $R'_2(6, 2)$

36	25
26	35
34	27
28	33
29	32
30	31

c) erhöht

Abb. 2.64: Teilrechtecke für die horizontale Erweiterung

Mit dieser Erweiterung entsteht das magische Rechteck $R(6, 10)$ aus Abbildung 2.65. Die Zeilensummen betragen 305 und die Spaltensummen 183.

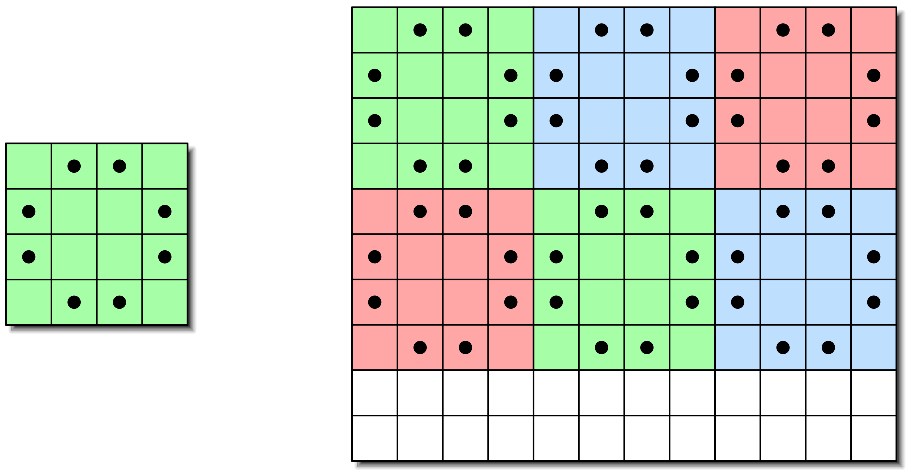
1	59	58	4	5	55	54	8	36	25
52	10	11	49	48	14	15	45	26	35
16	46	47	13	12	50	51	9	34	27
53	7	6	56	57	3	2	60	28	33
17	43	42	20	21	39	38	24	29	32
44	18	19	41	40	22	23	37	30	31

Abb. 2.65: Magisches Rechteck der Größe 6 x 10 (Diagonalenmethode)

Natürlich kann man wie immer auch bei dieser Methode die Zeilen und Spalten aller magischen Teilrechtecke, die als Zwischenergebnis auftreten, beliebig und unabhängig voneinander permutieren.

Varianten

Es gibt zwei Varianten, die bei der nachfolgenden Konstruktion eines Rechteckes der Größe 10 x 12 angewendet werden. Zunächst kann ein anderes Basisquadrat gewählt werden, bei dem die Markierung nicht auf den Diagonalen liegen. Bei der in diesem Beispiel gewählten Größe wird dieses Basismuster in sechs Teilquadrate kopiert.



a) Basismuster   b) reduziertes 8 x 12 - Rechteck

Abb. 2.66: Markierte Teilquadrate der Größe 4 für das Zielrechteck $R(10, 12)$

Als zweite Variante wird nicht von Zahlen in natürlicher Ordnung ausgegangen, sondern von Plussequenzen.[11] In diesem Beispiel ist die Schrittweite 2 gewählt worden, aber auch die Schrittweite 4 ist immer möglich.

Füllt man die 4 x 4 - Teilquadrate mit dieser Anordnung und ersetzt die Zahlen, die nicht auf markierten Zellen liegen, durch ihre komplementären Zahlen, ergibt sich das Rechteck aus Abbildung 2.67.

[11] Danielsson [5] s. Kapitel 1.8.2

1	3	2	4	5	7	6	8	9	11	10	12
13	15	14	16	17	19	18	20	21	23	22	24
25	27	26	28	29	31	30	32	33	35	34	36
37	39	38	40	41	43	42	44	45	47	46	48
49	51	50	52	53	55	54	56	57	59	58	60
61	63	62	64	65	67	66	68	69	71	70	72
73	75	74	76	77	79	78	80	81	83	82	84
85	87	86	88	89	91	90	92	93	95	94	96

a) Plussequenz mit Schrittweite 2

96	3	2	93	92	7	6	89	88	11	10	85
13	82	83	16	17	78	79	20	21	74	75	24
25	70	71	28	29	66	67	32	33	62	63	36
60	39	38	57	56	43	42	53	52	47	46	49
48	51	50	45	44	55	54	41	40	59	58	37
61	34	35	64	65	30	31	68	69	26	27	72
73	22	23	76	77	18	19	80	81	14	15	84
12	87	86	9	8	91	90	5	4	95	94	1

b) Übergang zu den komplementären Zahlen

Abb. 2.67: Magisches Rechteck $R_1(8, 12)$

Danach werden die Zahlen, die größer als die Mitte 48 sind, um 24 erhöht. Damit wird wieder Platz geschaffen für die 24 Zahlen, die in die beiden unteren Zeilen eingefügt werden sollen.

120	3	2	117	116	7	6	113	112	11	10	109
13	106	107	16	17	102	103	20	21	98	99	24
25	94	95	28	29	90	91	32	33	86	87	36
84	39	38	81	80	43	42	77	76	47	46	73
48	75	74	45	44	79	78	41	40	83	82	37
85	34	35	88	89	30	31	92	93	26	27	96
97	22	23	100	101	18	19	104	105	14	15	108
12	111	110	9	8	115	114	5	4	119	118	1

Abb. 2.68: Rechteck $R_1(8, 12)$ mit einigen um 24 erhöhten Zahlen

Für das Erweitern des Rechteckes R_1 um zwei weitere Zeilen, wird ein Rechteck $R'_1(2, 12)$ benötigt, dessen Zahlen alle um 48 erhöht werden.

1	23	22	4	5	19	18	8	9	15	14	12
24	2	3	21	20	6	7	17	16	10	11	13

49	71	70	52	53	67	66	56	57	63	62	60
72	50	51	69	68	54	55	65	64	58	59	61

Abb. 2.69: Magisches Rechteck $R'_1(2, 12)$ mit erhöhten Zahlen

Die zwei Zeilen vom Rechteck $R'_1(2, 12)$ können jetzt an beliebiger Stelle an das Rechteck $R_1(8, 12)$ angefügt werden, sodass das magische Rechteck $R_2(10, 12)$ aus Abbildung 2.70 entsteht. Da die Anzahl der Spalten ein Vielfaches von 4 ist, muss dieses Rechteck nicht mehr horizontal erweitert werden. Die Zeilensummen dieses magischen Rechteckes betragen 726 und die Spaltensummen 605.

120	3	2	117	116	7	6	113	112	11	10	109
13	106	107	16	17	102	103	20	21	98	99	24
25	94	95	28	29	90	91	32	33	86	87	36
84	39	38	81	80	43	42	77	76	47	46	73
48	75	74	45	44	79	78	41	40	83	82	37
85	34	35	88	89	30	31	92	93	26	27	96
97	22	23	100	101	18	19	104	105	14	15	108
12	111	110	9	8	115	114	5	4	119	118	1
49	71	70	52	53	67	66	56	57	63	62	60
72	50	51	69	68	54	55	65	64	58	59	61

Abb. 2.70: Magisches Rechteck der Größe 10 x 12 (Diagonalenmethode)

3 Rechtecke der Größe 2p+1 x 2q+1

3.1 Planck

Beispiel 3x5

C. Planck hat die *Methode der komplementären Unterschiede* entwickelt, um magische Rechtecke und Quadrate zu erzeugen.[12] Für ein magisches Rechteck der Größe 3×5 ordnet er die Zahlen $1, 2, \ldots, 15$ zu Paaren mit gleicher Summe an, wobei der Zahl 8 keine Partnerzahl zugewiesen wird.

z_1	z_2	$a = \frac{z_2 - z_1}{2}$
1	15	7
2	14	6
3	13	5
4	12	4
5	11	3
6	10	2
7	9	1
8		

Tab. 1: Kennzahlen für ein Rechteck der Größe 3 x 5

Jedes dieser Zahlenpaare besitzt unterschiedliche Differenzen, die Planck zusätzlich durch 2 dividiert. Planck sucht jetzt unter den sieben Kennzahlen a der rechten Spalte in Tabelle 1 nach zwei unterschiedlichen Kombinationen von Zahlen der Form $a = b + c$, deren zugeordnete Zahlen er dann in ein Rechteck S einfügt. Zudem wird immer der Median aller Zahlen, hier die Zahl 8, in das Zentrum dieses Rechteckes eingetragen.

Insgesamt gibt es für die Zahlen von 1 bis 7 genau drei derartige Kombinationen von Zahlen, von denen aber nur die obere aus Tabelle 2 zum Erfolg führt.

a	b	c		a	b	c
5	2	3		7	1	6
4	1	3		7	2	5
6	1	5		7	3	4

Tab. 2: Mögliche Kombinationen der Kennzahlen

Die erste Gleichung für die Kennzahlen der Form $a = b + c$ lautet $5 = 2 + 3$. Schaut man sich die beiden Zahlen an, die den Kennzahlen zugeordnet sind, erkennt man, dass die größere Zahl des der Kennzahl 5 zugeordneten Zahlenpaares 13 ist, während die beiden kleineren Zahlen der den Kennzahlen 2 und 3 zugeordneten Zahlenpaare die Zahlen 6 und 5 sind. Diese drei Zahlen ergeben genau die geforderte Spaltensumme $13 + 6 + 5 = 24$ und werden in eine beliebige Spalte eines Rechteckes S eingetragen. Die komplementären Partnerzahlen dieser Zahlen werden danach in die symmetrisch liegenden Zellen eingetragen.

[12] Planck [18]

a	13				
b	6		8		
c	5				

13				11
6		8		10
5				3

Abb. 3.1: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck S

Obwohl sowohl die Spalte als auch die Reihenfolge der drei Zahlen beliebig gewählt werden können, wird hier systematisch vorgegangen. Daher werden die Spalten immer von links nach rechts, die größere Zahl der Kennzahl a in die obere Zeile und die beiden kleineren Zahlen darunter eingetragen.

Die zweite Gleichung der gewählten Kombination lautet $7 = 1 + 6$. Damit ergeben sich für die nächste Spalte die drei Zahlen 15, 7 und 2, die wiederum die Spaltensumme 24 besitzen. Diese Zahlen und ihre zugehörigen Partnerzahlen 1, 9 und 14 werden wieder in die noch beiden noch freien Spalten eingetragen.

a	13	15			
b	6	7	8		
c	5	2			

13	15		14	11
6	7	8	9	10
5	2		1	3

Abb. 3.2: Eintragen der Zahlen für die zweite Gleichung

Damit bleibt nur noch die mittlere Spalte übrig. Die Kennzahl 4 wurde bis jetzt noch nicht benutzt und die beiden zugehörigen Zahlen 4 und 12 werden beliebig in die beiden noch freien Zellen dieser Spalte eingetragen. Damit ist das Rechteck S aus Abbildung 3.3 erzeugt worden, bei dem alle Spaltensummen 24 betragen.

13	15	4	14	11
6	7	8	9	10
5	2	12	1	3
24	24	24	24	24

Abb. 3.3: Rechteck S mit gleichen Spaltensummen

Im nächsten Schritt wird ein zweites Rechteck Z konstruiert, bei dem die Zahlen so angeordnet werden, dass alle Zeilensummen 40 betragen. Bei fünf Zahlen in einer Zeile wird für die Kennzahlen nach Gleichungen gesucht, die die Bedingung $d + e = f + g + h$ erfüllen. Insgesamt gibt es neun Kombinationen von Zahlen für diese Bedingung, die in Tabelle 3 aufgeführt sind.

d	e	f	g	h
6	2	4	1	3
7	2	5	1	3
7	3	5	1	4
7	4	6	2	3
7	5	6	2	4
6	4	7	1	2
6	4	5	2	3
6	5	7	1	3
5	4	6	1	2

Tab. 3: Mögliche Gleichungen der Form $d + e = f + g + h$

Allerdings gibt es für die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1 \\ a_2 &= b_2 + c_2 \\ d + e &= f + g + h \end{aligned}$$

zwei zusätzliche Bedingungen:

1. die beiden Zahlen b_i und c_i, die in den ersten beiden Gleichungen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens liegen, dürfen nicht auch in der dritten Gleichung auf einer Seite liegen
2. die Zahlen a_i und b_i sowie a_i und c_i, die auf verschiedenen Seiten liegen, dürfen nicht auch bei der dritten Gleichung auf verschiedenen Seiten liegen

Wählt man beispielsweise $a = b + c$ mit den Zahlen $7 = 1 + 6$, kann die Gleichung $4 + 5 = 1 + 2 + 6$ nicht benutzt werden, da sich die Zahlen 1 und 6 für b und c beide Male auf der rechten Seite befinden. Ebenso scheidet die Gleichung $2 + 7 = 1 + 3 + 5$ aus, da die Zahlen 7 und 1 für a und b jeweils auf verschiedenen Seiten liegen. Auch die Gleichung $4 + 7 = 2 + 3 + 6$ scheidet aus, da die Zahlen 7 und 6 für a und c in den Gleichungen auf verschiedenen Seiten liegen.

Von den ursprünglich neun Gleichungen bleibt mit den beiden zusätzlichen Bedingungen nur noch die obere Gleichung $6 + 2 = 4 + 1 + 3$ aus Tabelle 3 übrig und führt zu einem magischen Rechteck. Alle anderen Kombinationen von Gleichungen erfüllen nicht alle Bedingungen.

Zuerst werden die beiden kleineren Zahl 2 und 6 der Kennzahlen 6 und 2 in die untere Zeile der beiden linken Spalten eines Rechteckes Z eingetragen. In diese Zeile werden danach auch die größeren Zahlen 12, 9 und 11 der Kennzahlen 4, 1 und 3 platziert. Die Reihenfolge der Spalten beim Eintragen ist ebenso vollkommen beliebig wie die Auswahl der unteren oder oberen Zeile zum Eintragen dieser Zahlen. Hier wurde allerdings systematisch von links nach rechts vorgegangen, um die Ergebnisse der verschiedenen Beispiele besser vergleichen zu können. Die komplementären Partnerzahlen werden danach in die symmetrisch liegenden Zellen eingetragen.

		8		
2	6	12	9	11
d	e	f	g	h

5	7	4	10	14
		8		
2	6	12	9	11

Abb. 3.4: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck Z

Bei diesem Rechteck sind die Kennzahlen 5 und 7 bisher noch nicht benutzt worden. Die zugehörigen Zahlen 3 und 13 sowie 1 und 15 werden jetzt in zwei beliebige horizontal symmetrisch liegende Zellenpaare eingetragen.

5	7	4	10	14	40
3	1	8	15	13	40
2	6	12	9	11	40

Abb. 3.5: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck Z

Bis jetzt sind zwei Hilfsrechtecke erzeugt worden. Das erste Rechteck S besitzt die Spaltensummen 24 und das Rechteck Z die für das magische Rechteck geforderten Zeilensummen 40. Diese beiden Rechtecke werden abschließend zu einem magischen Rechteck kombiniert, indem man im Rechteck Z einige Verschiebungen vornimmt, sodass zusätzlich die Spaltensummen passen.

Man beginnt mit der Zahl 5 in der linken oberen Ecke des Rechteckes Z. Am Rechteck S erkennt man, dass die Zahlen 13 und 6 für die Spaltensumme 24 fehlen. Diese befinden sich in den Zeilen 2 und 3 von Z und werden in die linke Spalte zu der Zahl 5 verschoben.

5	7	4	10	14
3	1	8	15	13
2	6	12	9	11

5	7	4	10	14
13	3	1	8	15
6	2	12	9	11
24				

Abb. 3.6: Verschieben von Zahlen in Z in die erste Spalte

Dann folgt in der oberen Zeile von Z die Zahl 7. Im Rechteck S erkennt man, dass diese Zahl mit den Zahlen 15 und 2 die geforderte Spaltensumme ergibt. Also werden diese beiden Zahlen in die zweite Spalte verschoben.

5	7	4	10	14
13	3	1	8	15
6	2	12	9	11
24				

5	7	4	10	14
13	15	3	1	8
6	2	12	9	11
24	24			

Abb. 3.7: Verschieben von Zahlen in Z in die zweite Spalte

Zu den nächsten beiden Zahlen 4 und 10 in der oberen Zeile von Z gehören die Zahlen 8 und 12 sowie 3 und 11, die entsprechend in die passenden Spalten verschoben werden. Die Zeilensummen betragen 40 und die Spaltensummen 24.

5	7	4	10	14
13	15	8	3	1
6	2	12	9	11
24	24	24		

5	7	4	10	14
13	15	8	3	1
6	2	12	11	9
24	24	24	24	

Abb. 3.8: Verschieben von Zahlen in Z in die dritte und vierte Spalte

Wenn jetzt auch die letzte Spalte die geforderte Spaltensumme ergibt, waren die gewählten Bedingungen erfüllt und es entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 3.9.

5	7	4	10	14	40
13	15	8	3	1	40
6	2	12	11	9	40
24	24	24	24	24	

Abb. 3.9: Magisches Rechteck der Größe 3 x 5 (Planck)

Beispiel 3x7

Für das nächste Beispiel eines magischen 3 x 7 - Rechteckes wird zunächst wieder die Ausgangstabelle mit den komplementären Zahlenpaaren aufgestellt.

z_1	z_2	$a = \frac{z_2 - z_1}{2}$
1	21	10
2	20	9
3	19	8
4	18	7
5	17	6
6	16	5
7	15	4
8	14	3
9	13	2
10	12	1
11		

Tab. 4: Kennzahlen für ein Rechteck der Größe 3 x 7

Jetzt sucht man unter den zehn Kennzahlen der rechten Spalte in Tabelle 4 nach drei unterschiedlichen Paaren von Kennzahlen der Form $a = b + c$. In das Zentrum des Zielrechteckes wird bei dieser Größe die Zahl 11 platziert.

Bei dieser Größe gibt es bereits zwölf geeignete Kombinationen, die dieses Mal auch alle benutzt werden können.

a	b	c	a	b	c	a	b	c
5	1	4	8	2	6	10	3	7
5	1	4	9	3	6	10	2	8
5	2	3	8	1	7	10	4	6
5	2	3	9	1	8	10	4	6
6	1	5	7	3	4	10	2	8
6	2	4	8	3	5	10	1	9
6	2	4	9	1	8	10	3	7
7	1	6	9	4	5	10	2	8
7	2	5	9	1	8	10	4	6
7	3	4	8	2	6	10	1	9
8	2	6	9	4	5	10	3	7
8	3	5	9	2	7	10	4	6

Tab. 5: Mögliche Kombinationen der Kennzahlen

In diesem Beispiel sind für die Kennzahlen folgende Gleichungen gewählt worden:

$$10 = 2 + 8 \qquad 7 = 3 + 4 \qquad 6 = 1 + 5$$

Wie im ersten Beispiel werden die diesen Kennzahlen zugeordneten Zahlen in die linken Spalten des Hilfsrechteckes S eingetragen. Danach werden die komplementären Partnerzahlen in den symmetrisch liegenden Zellen platziert.

a	21	18	17				
b	9	8	10	11			
c	3	7	6				

21	18	17		16	15	19
9	8	10	11	12	14	13
3	7	6		5	4	1

Abb. 3.10: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck S

Die Kennzahl 9 noch wurde bis jetzt nicht benutzt und die beiden zugehörigen Zahlen 2 und 20 werden in die noch freien Zellen eingetragen und alle Spaltensummen des Rechteckes S betragen 33.

21	18	17	2	16	15	19
9	8	10	11	12	14	13
3	7	6	20	5	4	1
33	33	33	33	33	33	33

Abb. 3.11: Rechteck S mit gleichen Spaltensummen

Das zweite Hilfsrechteck Z wird wieder so konstruiert, dass es gleiche Zeilensummen besitzt. Bei dieser Größe mit sieben Spalten lautet die zweite Bedingung jetzt $d+e+f = g+h+i+j$. Es existieren insgesamt 171 dieser Gleichungen, von denen aber nur sechs die zusätzlichen Bedingungen in Verbindung mit den drei Gleichungen der Form $a+b=c$ erfüllen. Für die weitere Konstruktion ist die Gleichung

$$2+9+10 = 3+5+6+7$$

gewählt worden. Die kleineren Zahlen der Kennzahlen 2, 9 und 10 werden in die drei linken Spalten der unteren Zeile von Z eingetragen, gefolgt von den größeren Zahlen der Kennzahlen 3, 5, 6, und 7. Danach werden die komplementären Partnerzahlen in die symmetrisch liegenden Zellen platziert.

			11			
9	2	1	14	16	17	18
d	e	f	g	h	i	j

4	5	6	8	21	20	13
			11			
9	2	1	14	16	17	18

Abb. 3.12: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck Z

Die Kennzahlen 1, 4 und 8 sind bei dieser Wahl der Gleichung bisher nicht genutzt worden, sodass die zugehörigen Zahlen in drei beliebige horizontal symmetrisch liegende Zellenpaare eingetragen werden können.

4	5	6	8	21	20	13	77
10	7	3	11	19	15	12	77
9	2	1	14	16	17	18	77

Abb. 3.13: Rechteck Z mit gleichen Zeilensummen

Damit sind die zwei benötigten Hilfsrechtecke erzeugt worden. Das erste Rechteck S besitzt die Spaltensummen 33 und Rechteck Z die für das magische Rechteck geforderten Zeilensummen 77. Damit können die beiden Rechtecke zu einem magischen Rechteck kombiniert werden.

Dazu bleiben die Zahlen in der oberen Zeile des Rechteckes Z unverändert und die Zahlen in den beiden unteren Zeilen werden so verschoben, dass dann auch die Spaltensummen gleich sind.

4	5	6	8	21	20	13
15	10	7	3	11	19	12
14	9	2	1	16	17	18
33						

4	5	6	8	21	20	13
15	12	10	7	3	11	19
14	16	9	2	1	17	18
33	33					

4	5	6	8	21	20	13
15	12	10	7	3	11	19
14	16	17	9	2	1	18
33	33	33				

4	5	6	8	21	20	13
15	12	10	7	3	11	19
14	16	17	18	9	2	1
33	33	33	33			

4	5	6	8	21	20	13
15	12	10	7	3	11	19
14	16	17	18	9	2	1
33	33	33	33	33		

4	5	6	8	21	20	13
15	12	10	7	3	11	19
14	16	17	18	9	2	1
33	33	33	33	33	33	

Abb. 3.14: Verschieben von Zahlen im Rechteck Z in die passenden Spalten

Die letzten Spalten sind schon korrekt angeordnet und da sich die Zeilensummen nicht ändern, entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 3.15. Die Zeilensummen betragen 77 und die Spaltensummen 33.

4	5	6	8	21	20	13	77
15	12	10	7	3	11	19	77
14	16	17	18	9	2	1	77
33	33	33	33	33	33	33	

Abb. 3.15: Magisches Rechteck der Größe 3 x 7 (Planck)

Beispiel 5x7

Für ein magisches Rechteck der Größe 5 x 7 ergibt sich zunächst folgende Ausgangstabelle.

z_2	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
z_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$a = \frac{z_2 - z_1}{2}$	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Tab. 6: Kennzahlen für ein Rechteck der Größe 5 x 7

Da jetzt fünf Zeilen und sieben Spalten vorhanden sind, müssen auch die für die Konstruktion notwendigen Gleichungen für das Rechteck S mit gleichen Spaltensummen angepasst werden, sodass drei Gleichungen der Form $a + b = c + d + e$ benötigt werden. Für dieses Beispiel sind folgende Gleichungen für die fünf Zeilen gewählt worden.

$$8 + 9 = 2 + 5 + 10$$
$$12 + 14 = 4 + 7 + 15$$
$$13 + 16 = 1 + 11 + 17$$

Die zu den zwei Kennzahlen der linken Gleichungsseite gehörenden Zahlen werden in die beiden oberen Zeilen eingetragen, und die zu den drei Kennzahlen der rechten Gleichungsseite gehörenden kleineren Zahlen darunter. Da der Median 18 wieder im Zentrum platziert wird, erhält man zunächst folgendes Zwischenergebnis.

a	26	30	31				
b	27	32	34				
c	16	14	17	18			
d	13	11	7				
e	8	3	1				

Abb. 3.16: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck S

Danach werden die komplementären Zahlen in die symmetrisch liegenden Zellen platziert.

26	30	31		35	33	28
27	32	34		29	25	23
16	14	17	18	19	22	20
13	11	7		2	4	9
8	3	1		5	6	10

Abb. 3.17: Eintragen der Zahlen in die symmetrisch liegenden Zellen

Die Kennzahlen 3 und 6 sind bisher noch nicht benutzt worden, sodass die zugehörigen Zahlen 15 und 21 sowie 12 und 24 in zwei beliebige vertikal symmetrisch liegende Zellenpaare eingetragen werden. Damit ist das Rechteck S mit gleichen Spaltensummen erzeugt.

26	30	31	15	35	33	28
27	32	34	12	29	25	23
16	14	17	18	19	22	20
13	11	7	24	2	4	9
8	3	1	21	5	6	10

Abb. 3.18: Rechteck S mit gleichen Spaltensummen

Für das zweite Rechteck Z müssen bei sieben Spalten jetzt zwei Gleichungen der Form

$$f + g + h = k + l + m + n$$

gefunden werden, die auch die zusätzlichen beiden Bedingungen erfüllen. Mit 35 beteiligten Zahlen, erhöht sich die Anzahl der zur Auswahl stehenden Gleichungen drastisch. In diesem Beispiel werden die folgenden beiden Gleichungen benutzt.

$$\begin{gathered} f + g + h = k + l + m + n \\ 2 + 7 + 17 = 4 + 5 + 6 + 11 \\ 8 + 10 + 14 = 1 + 3 + 12 + 16 \end{gathered}$$

Die den gewählten Kennzahlen zugeordneten Zahlen werden zunächst in die beiden unteren Zeilen eingetragen. (siehe Abbildung 3.19)

			18			
10	8	4	19	21	30	34
16	11	1	22	23	24	29
f	g	h	k	l	m	n

Abb. 3.19: Eintragen der den Kennzahlen zugeordneten Zahlen in das Rechteck Z

Danach werden die komplementären Partnerzahlen in die symmetrisch liegenden Zellen platziert. (siehe Abbildung 3.20)

7	12	13	14	35	25	20
2	6	15	17	32	28	26
			18			
10	8	4	19	21	30	34
16	11	1	22	23	24	29

Abb. 3.20: Eintragen der komplementären Partnerzahlen

Bei diesem Rechteck sind die Kennzahlen 1 und 4 bisher noch nicht benutzt worden. Die zugehörigen Zahlen werden jetzt in zwei beliebige, horizontal symmetrische Zellen eingetragen. (siehe Abbildung 3.21)

7	12	13	14	35	25	20
2	6	15	17	32	28	26
9	5	3	18	33	31	27
10	8	4	19	21	30	34
16	11	1	22	23	24	29

Abb. 3.21: Eintragen der noch nicht benutzten Zahlen in das Rechteck Z

Bis jetzt sind zwei Hilfsrechtecke erzeugt worden. Das erste Rechteck S besitzt die Spaltensummen 90 und das Rechteck Z die für das magische Rechteck geforderten Zeilensummen 126. Diese beiden Rechtecke werden wieder zu einem magischen Rechteck kombiniert, indem man im Rechteck Z einige Verschiebungen vornimmt, sodass auch die Spaltensummen passen. Die dazu notwendigen Verschiebungen sind in Abbildung 3.22 dargestellt.

7	12	13	14	35	25	20
17	2	6	15	32	28	26
31	9	5	3	18	33	27
34	10	8	4	19	21	30
1	16	11	22	23	24	29
90						

7	12	13	14	35	25	20
17	15	2	6	32	28	26
31	18	9	5	3	33	27
34	21	10	8	4	19	30
1	24	16	11	22	23	29
90	90					

7	12	13	14	35	25	20
17	15	26	2	6	32	28
31	18	27	9	5	3	33
34	21	8	10	4	19	30
1	24	16	11	22	23	29
90	90	90				

7	12	13	14	35	25	20
17	15	26	32	2	6	28
31	18	27	3	9	5	33
34	21	8	30	10	4	19
1	24	16	11	22	23	29
90	90	90	90			

7	12	13	14	35	25	20
17	15	26	32	2	6	28
31	18	27	3	5	9	33
34	21	8	30	19	10	4
1	24	16	11	29	22	23
90	90	90	90	90		

7	12	13	14	35	25	20
17	15	26	32	2	6	28
31	18	27	3	5	33	9
34	21	8	30	19	4	10
1	24	16	11	29	22	23
90	90	90	90	90	90	

Abb. 3.22: Verschieben von Zahlen im Rechteck Z

Mit diesen Verschiebungen entsteht das magische Rechteck aus Abbildung 3.23. Die Zeilensummen betragen 126 und die Spaltensummen 90.

7	12	13	14	35	25	20	126
17	15	26	32	2	6	28	126
31	18	27	3	5	33	9	126
34	21	8	30	19	4	10	126
1	24	16	11	29	22	23	126
90	90	90	90	90	90	90	

Abb. 3.23: Magisches Rechteck der Größe 3 x 19 (Planck)

Beispiel 3x7

Um das Verfahren von Planck noch besser verstehen zu können, soll noch ein zweites Beispiel für ein magisches Rechteck der Größe 3 x 7 gegeben werden. Mit den Gleichungen

$$6 = 2 + 4 \qquad 2 + 7 + 10 = 1 + 4 + 5 + 9$$
$$9 = 1 + 8$$
$$10 = 3 + 7$$

entsteht aus den Rechtecken S und Z das magische Rechteck aus Abbildung 3.24.

17	20	21	6	18	19	15
9	10	8	11	14	12	13
7	3	4	16	1	2	5

a) S

2	6	7	10	21	18	13
19	11	17	3	8	14	5
12	16	9	20	4	1	15

b) Z

2	6	7	10	21	18	13
19	11	17	3	8	14	5
12	16	9	20	4	1	15

c) magisches Rechteck

Abb. 3.24: Magisches Rechteck der Größe 3 x 7 (Planck)

Beispiel 5x7

Ebenso soll noch ein zweites Beispiel für ein Rechteck der Größe 5 x 7 gegeben werden, wo die geeigneten Gleichungen wegen der Vielzahl an theoretischen Möglichkeiten schon deutlich schwerer zu finden sind. Mit den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
1 + 10 &= 2 + 4 + 5 & \qquad 7 + 8 + 16 &= 1 + 4 + 12 + 14 \\
7 + 17 &= 3 + 8 + 13 & \qquad 9 + 11 + 13 &= 3 + 5 + 10 + 15 \\
14 + 16 &= 6 + 9 + 15
\end{aligned}
$$

ergibt sich das magische Rechteck aus Abbildung 3.25.

19	25	32	7	33	31	23
28	35	34	6	27	26	22
16	15	12	18	24	21	20
14	10	9	30	2	1	8
13	5	3	29	4	11	17

a) S

4	6	14	17	34	26	25
3	8	13	15	31	29	27
16	12	1	18	35	24	20
9	7	5	21	23	28	33
11	10	2	19	22	30	32

b) Z

4	6	14	17	34	26	25
27	29	13	8	3	31	15
24	18	16	20	12	1	35
33	7	28	23	9	21	5
2	30	19	22	32	11	10

c) magisches Rechteck

Abb. 3.25: Magisches Rechteck der Größe 5 x 7 (Planck)

3.2 Hagedorn

Rechtecke 3xn

Thomas R. Hagedorn hat ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich magische Rechtecke $R(m,n)$ erzeugen lassen, wenn m und n ungerade sind.[13] Dabei geht er immer von Rechtecken der Größe 3 x n aus, deren Konstruktion daher zunächst dargestellt wird. Der Übersichtlichkeit halber werden hier viele Teilrechtecke wie im Originalartikel als Matrizen angegeben.

Prinzipiell müssen zwei Fälle unterschieden werden, nämlich $n \equiv 1 \mod 4$ und $n \equiv 3 \mod 4$, bei denen unterschiedlich vorgegangen wird. In beiden Fällen benötigt man zwei Matrizen $B_+(i)$ und $B_-(i)$, mit denen ein bereits vorhandenes kleineres Rechteck zu dem gesuchten Zielrechteck aufgefüllt wird.[14]

[13] Hagedorn [8]

[14] Wie im Originalartikel werden die Rechtecke teilweise als Matrizen dargestellt, um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten

$$B_+(i) = \begin{pmatrix} i+1 & n+1-i \\ \frac{3n+1}{2}+i & \frac{3n+1}{2}-i \\ 3n-2i & 2n+2i \end{pmatrix} \qquad B_-(i) = \begin{pmatrix} 3n-2i & 2n+2i \\ \frac{3n+1}{2}+i & \frac{3n+1}{2}-i \\ i+1 & n+1-i \end{pmatrix}$$

Bei beiden Matrizen ist zu beachten, dass alle Spaltensummen $\frac{3\,(3n+1)}{2}$ betragen. Die Zeilensummen von $B_+(i)$ sind $n+2$, $3n+1$ und $5n$ und die von $B_-(i)$ dagegen $5n$, $3n+1$ und $n+2$. Verbindet man also diese beiden Matrizen, besitzt die entstehende Matrix gleiche Zeilen- und Spaltensummen.

Beispiel 3x9

Im ersten Beispiel wird das Rechteck $R(3,9)$ erzeugt, welches dem Fall $n \equiv 1 \mod 4$ zuzuordnen ist. Hier startet man mit der Matrix A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & \frac{n+3}{2} \\ 3n & \frac{n+1}{2} & n+1 \\ \frac{3n+1}{2} & 2n+1 & 3n-1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 27 & 5 & 10 \\ 14 & 19 & 26 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A_1 wird durch $\frac{n-5}{4}$ Matrizen der Form $B_+(i)$ ergänzt, wobei i die Werte $1, 2, \ldots, \frac{n-5}{4}$ annimmt. Zusätzlich werden noch $\frac{n-1}{4}$ Matrizen $B_-(i)$ für $i = \frac{n-1}{4}, \ldots, \frac{n-3}{2}$ angefügt. Im Beispiel für $n = 9$ werden mit $\frac{n-5}{4} = 1$, $\frac{n-1}{4} = 2$ und $\frac{n-3}{2} = 3$ also eine Matrix $B_+(i)$ und zwei Matrizen $B_-(i)$ angefügt.

$$B_+(1) = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 15 & 13 \\ 25 & 20 \end{pmatrix} \qquad B_-(2) = \begin{pmatrix} 23 & 22 \\ 16 & 12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B_-(3) = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 17 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Matrizen entsteht das magische Rechteck $R(3,9)$ aus Abbildung 3.26.

1	18	6	2	9	23	22	21	24
27	5	10	15	13	16	12	17	11
14	19	26	25	20	3	8	4	7

A_1 $\quad B_+(1)$ $\quad B_-(2)$ $\quad B_-(3)$

Abb. 3.26: Magisches Rechteck der Größe 3 x 9 (Hagedorn)

Beispiel 3x11

Der zweite Fall $n \equiv 3 \mod 4$ soll an einem Rechteck mit $n = 11$ dargestellt werden. Hier beginnt man mit der Matrix A_3.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+3}{2} \\ 3n & n+1 \\ \frac{3n+1}{2} & 3n-1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 33 & 12 \\ 17 & 32 \end{pmatrix}$$

Für eine weitere Hilfsmatrix B wird eine Konstante $c = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ benötigt. Damit nimmt die Differenz $n - 3c$ immer einen der drei Werte 0 oder ±1 an, wie aus Tabelle 7 für einige Werte von n hervorgeht.

n	$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$	c	$n - 3c$
7	$\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor$	2	1
11	$\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor$	4	−1
15	$\left\lfloor \frac{16}{3} \right\rfloor$	5	0
19	$\left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor$	6	1
23	$\left\lfloor \frac{24}{3} \right\rfloor$	8	−1
27	$\left\lfloor \frac{28}{3} \right\rfloor$	9	0

Tab. 7: Einige Werte der Konstanten c für einige Werte von n

Mit dieser Konstanten c wird die Matrix B definiert.

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} c+1 & 2n+1 & 2n+2c \\ \frac{3n+1}{2}+c & \frac{n+1}{2} & \frac{3n+1}{2}-c \\ 3n-2c & 2n & n+1-c \end{pmatrix} & \text{für } n-3c=1 \\ \begin{pmatrix} c+1 & 2n & 2n+2c \\ \frac{3n+1}{2}+c & \frac{n+1}{2} & \frac{3n+1}{2}-c \\ 3n-2c & 2n+1 & n+1-c \end{pmatrix} & \text{für } n-3c=0 \\ \begin{pmatrix} 3n-2c & 2n+1 & n+1-c \\ \frac{3n+1}{2}+c & \frac{n+1}{2} & \frac{3n+1}{2}-c \\ c+1 & 2n & 2n+2c \end{pmatrix} & \text{für } n-3c=-1 \end{cases}$$

Für die Konstruktion des magischen Rechteckes beginnt man mit den drei Hilfsmatrizen A, B und $B_{-}(1)$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 33 & 12 \\ 17 & 32 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 25 & 23 & 8 \\ 21 & 6 & 13 \\ 5 & 22 & 30 \end{pmatrix} \qquad B_{-}(1) = \begin{pmatrix} 31 & 24 \\ 18 & 16 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Fügt man diese drei Matrizen zusammen, erhält man das Rechteck der Größe 3 x 7 aus Abbildung 3.28, bei dem alle Zeilen- und Spaltensummen mit 119 bzw. 51 gleich sind.

1	7	25	23	8	31	24				
33	12	21	6	13	18	16				
17	32	5	22	30	2	11				

A_3 B $B_-(1)$

Abb. 3.27: Hilfsrechteck der Größe 3 x 7

Für das gesuchte Rechteck $R(3, 11)$ müssen jetzt nur noch $\frac{n-7}{4}$ Matrizen $B_+(i)$ für $2 \leq i \leq \frac{n-3}{4}$ und ebenso viele Matrizen $B_-(i)$ für $\frac{n+1}{4} \leq i \leq \frac{n-3}{2}$ hinzugefügt werden, wobei allerdings $i = c$ ausgeschlossen wird.

Durch das Hinzufügen dieser Matrizen ändern sich die Zeilensummen nicht mehr und es entsteht das magische Rechteck $R(3, n)$. Für das gewählte Beispiel mit $n = 11$ muss also nur noch eine einzige Matrix $B_+(2)$ sowie eine Matrix $B_-(3)$ hinzugefügt werden, weil der Wert von $i = c = 4$ übersprungen wird. Das so erzeugte magische Rechteck $R(3, 11)$ ist in Abbildung 3.28 dargestellt. Es besitzt die Zeilensummen 187 und die Spaltensummen 51.

1	7	25	23	8	31	24	3	10	27	28
33	12	21	6	13	18	16	19	15	20	14
17	32	5	22	30	2	11	29	26	4	9

$B_+(2)$ $B_-(3)$

Abb. 3.28: Magisches Rechteck der Größe 3 x 11 (Hagedorn)

Beispiel 5x9

Soll ein magisches Rechteck mit mehr als drei Zeilen konstruiert werden, wird schrittweise das Rechteck $R(m-2, n)$ durch Hinzufügen von zwei Zeilen auf das Rechteck $R(m, n)$ erweitert. Für das Rechteck $R(5, 9)$ muss also zuerst ein Rechteck $R(3, 9)$ erzeugt werden.

1	18	6	2	9	23	22	21	24
27	5	10	15	13	16	12	17	11
14	19	26	25	20	3	8	4	7

Abb. 3.29: Magisches Rechteck $R(3, 9$

Allgemein enthält das Ausgangsrechteck $R(m-2, n)$ die Zahlen von 1 bis $mn - 2n$. Zu allen Zahlen dieses Rechteckes wird jeweils n addiert, sodass nach der Addition die Zahlen von $n + 1$ bis $mn - n$ enthalten sind. Mit $d = \frac{m-1}{2}$ enthält dann eine dieser Zeilen die Zahlen von d_1 bis d_2 mit Ausnahme der Zahl $x = dn + \frac{n+1}{2}$.

$$d_1 = dn + d - 1 \qquad \text{bis} \qquad d_2 = dn + n + 1 - d$$

In diesem Beispiel für ein Rechteck mit $m = 5$ Zeilen wird zunächst die Konstante $n = 9$ addiert und man erhält das Rechteck $R'(3, 9)$.

10	27	15	11	18	32	31	30	33
36	14	19	24	22	25	21	26	20
23	28	35	34	29	12	17	13	16

Abb. 3.30: Rechteck $R'(3, 9)$ mit erhöhten Zahlen

Mit $d = \frac{m-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ erhält man die benötigten Konstanten.

$$d = 2 \qquad d_1 = d \cdot n + d - 1 = 19 \qquad d_2 = d \cdot n + n + 1 - d = 26 \qquad x = dn + \frac{n+1}{2} = 23$$

Jetzt werden die beiden Spalten gesucht, in denen die beiden Zahlen d_1 und d_2 vorkommen. Diese beiden Spalten werden an den linken Rand des Rechteckes verschoben, indem man die Spalten beispielsweise mit dort vorhandenen Spalten austauscht.

10	27	15	11	18	32	31	30	33
36	14	19	24	22	25	21	26	20
23	28	35	34	29	12	17	13	16

15	30	10	11	18	32	31	27	33
19	26	36	24	22	25	21	14	20
35	13	23	34	29	12	17	28	16

Abb. 3.31: Verschieben von zwei Spalten an den linken Rand

Nun gibt es $\frac{n-5}{2}$ Zahlen, die kleiner als $\frac{n}{2}$ und verschieden von d bzw. $d-1$ sind. Für $n = 9$ sind dies die Zahlen 3 und 4. Diese Zahlen werden in zwei Gruppen a_i und b_i aufgeteilt, wobei zwei Fälle unterschieden werden.

Gilt $n \equiv 1 \mod 4$, werden $\frac{n-1}{4}$ Zahlen der Gruppe a_i und $\frac{n-9}{4}$ Zahlen der Gruppe b_i zugeteilt. Im anderen Fall $n \equiv 3 \mod 4$ werden diese Zahlen so aufgeteilt, dass die beiden Gruppen $\frac{n-3}{4}$ bzw. $\frac{n-7}{4}$ Zahlen enthalten. Für das aufgeführte Beispiel trifft der erste Fall zu und mit $\frac{n-1}{4} = \frac{9-1}{4} = 2$ werden die beiden Zahlen 3 und 4 beide der Gruppe a_i zugeordnet, während b_i leer bleibt.

Um das magische Rechteck mit dieser Anzahl von Spalten zu konstruieren, werden nun weitere Matrizen benötigt.

$$A = \begin{pmatrix} d-1 & d & n+2-d & n+1-d \\ mn+2-d & mn+1-d & mn-n+d-1 & mn-n+d \end{pmatrix}$$

$$C_+(i) = \begin{pmatrix} i & n+1-i \\ mn+1-i & mn-n+i \end{pmatrix} \qquad C_-(i) = \begin{pmatrix} mn+1-i & mn-n+i \\ i & n+1-i \end{pmatrix}$$

$$D_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} \\ mn + \frac{1-n}{2} \end{pmatrix} & \text{für } n \equiv 1 \mod 4 \\ \\ \begin{pmatrix} mn + \frac{1-n}{2} \\ \frac{n+1}{2}] \end{pmatrix} & \text{für } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

Zunächst wird die Matrix A in ein Hilfsrechteck $H(2, n)$ mit nur zwei Zeilen eingefügt. Danach folgen für jede Zahl aus a_i die Matrizen $C_-(a_i)$ und für jede Zahl aus b_i die Matrizen $C_+(b_i)$, bevor die Matrix D_n den Abschluss bildet.

Für das aktuelle Beispiel bedeutet dies also zunächst die Matrix A, dann für die Zahlen 3 und 4 die beiden Matrizen $C_-(3)$ und $C_-(4)$. Da die Gruppe bi leer ist, wird keine Matrix $C_+(b_i)$ eingefügt und D_9 kann den Abschluss bilden. Mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 45 & 44 & 37 & 38 \end{pmatrix} \qquad C_-(3) = \begin{pmatrix} 43 & 39 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad C_-(4) = \begin{pmatrix} 42 & 40 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad D_9 = \begin{pmatrix} 5 \\ 41 \end{pmatrix}$$

ist damit das $H(2, 9)$ das Hilfsrechteck in Abbildung 3.32 bestimmt.

1	2	9	8	43	39	42	40	5
45	44	37	38	3	7	4	6	41

A $\quad C_-(3)$ $\quad C_-(4)$ $\quad D_n$

Abb. 3.32: Vollständiges Hilfsrechteck $H(2, 9)$

Jetzt müssen nur noch die beiden Rechtecke $R(3, 9)$ und $H(2, 9)$ aus den Abbildungen 3.31 und 3.32 zusammengefügt werden und es entsteht das Rechteck der Größe 5 x 9 aus Abbildung 3.33.

15	30	10	11	18	32	31	27	33
19	26	36	24	22	25	21	14	20
35	13	23	34	29	12	17	28	16
1	2	9	8	43	39	42	40	5
45	44	37	38	3	7	4	6	41

Abb. 3.33: Vollständig gefülltes Rechteck der Größe 5 x 9

Durch die gewählten Hilfsrechtecke sind die Spaltensummen mit 115 bereits alle gleich. Jedoch besitzen die beiden unteren Zeilen mit 225 und 189 noch nicht die geforderte Zeilensumme 207.

Dieses Problem kann aber gelöst werden, indem die Zahlen d_1 und d_2 sowie d_3 und d_4 vertauscht werden.

$$d_1 = d - 1 \qquad d_2 = dn + d - 1 \qquad d_3 = mn + 1 - d \qquad d_4 = dn + n + 1 - d$$

In diesem Beispiel gilt $d_1 = 1$ und $d_2 = 19$, die sich in Spalte 1 befinden, sowie $d_3 = 44$ und $d_4 = 26$ in Spalte 2. Mit diesen Vertauschungen entsteht das magische Rechteck $R(5, 9)$, das in Abbildung 3.34 dargestellt ist. Die Zeilensummen betragen 207 und die Spaltensummen 115.

15	30	10	11	18	32	31	27	33
1	44	36	24	22	25	21	14	20
35	13	23	34	29	12	17	28	16
19	2	9	8	43	39	42	40	5
45	26	37	38	3	7	4	6	41

Abb. 3.34: Magisches Rechteck der Größe 5 x 9 (Hagedorn)

Auch für den Fall $n \equiv 3 \mod 4$ soll mit dem Rechteck $R(5, 11)$ noch ein Beispiel angegeben werden. Zunächst ergibt sich das Rechteck $R'(3, 11)$, bei dem die Zahlen alle um 11 erhöht werden.

1	7	25	23	8	31	24	3	10	27	28
33	12	21	6	13	18	16	19	15	20	14
17	32	5	22	30	2	11	29	26	4	9

12	18	36	34	19	42	35	14	21	38	39
44	23	32	17	24	29	27	30	26	31	25
28	43	16	33	41	13	22	40	37	15	20

Abb. 3.35: Hilfsrechtecke $R(3, 11)$ und $R'(3, 11)$

Mit $d = 2$ bestimmt man zunächst die zu verschiebenden Spalten, in denen die beiden Zahlen $d_1 = d \cdot n + d - 1 = 23$ und $d_2 = d \cdot n + n + 1 - d = 32$ auftreten. Hier werden die Spalten 2 und 3 gefunden und diese beiden Spalten dann an den linken Rand verschoben.

12	18	36	34	19	42	35	14	21	38	39
44	23	32	17	24	29	27	30	26	31	25
28	43	16	33	41	13	22	40	37	15	20

18	36	12	34	19	42	35	14	21	38	39
23	32	44	17	24	29	27	30	26	31	25
43	16	28	33	41	13	22	40	37	15	20

Abb. 3.36: Verschieben von zwei Spalten an den linken Rand

Mit $\frac{n-5}{2} = \frac{11-5}{2} = 3$ gibt es nun drei Zahlen 3, 4 und 5, die kleiner als $\frac{n}{2}$ sind. Dabei bilden jetzt die Zahlen 3 und 4 die Gruppe a_i, während die Gruppe b_i die Zahl 5 enthält.

Für das Hilfsrechteck H werden jetzt neben dem Rechteck A für die beiden Zahlen aus a_i die Rechtecke $C_-(3)$ und $C_-(4)$ benötigt. Da b_i in diesem Beispiel nicht leer ist, sondern die Zahl 5 enthält, wird auch das Rechteck $C_+(5)$ eingefügt. D_{11} bildet dann wieder den Abschluss. Fügt man alle Hilfsrechtecke in H ein, entsteht das Rechteck aus Abbildung 3.37.

1	2	11	10	53	47	52	48	5	7	50
55	54	45	46	3	9	4	8	51	49	6

$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{A}$ $\underbrace{\quad\quad}_{C_{-}(3)}$ $\underbrace{\quad\quad}_{C_{-}(4)}$ $\underbrace{\quad\quad}_{C_{+}(5)}$ $\underbrace{\quad}_{D_{11}}$

Abb. 3.37: Vollständiges Hilfsrechteck $H(2, 11)$

Fügt man die beiden Rechtecke $H(2, 11)$ und $R'(3, 11)$ in das Zielrechteck ein, entsteht das Rechteck aus Abbildung 3.38, bei dem wieder die Spaltensummen mit 140 übereinstimmen. Doch weichen wieder die beiden unteren Zeilen mit 330 und 286 von der geforderten Zeilensumme 308 ab.

18	36	12	34	19	42	35	14	21	38	39
23	32	44	17	24	29	27	30	26	31	25
43	16	28	33	41	13	22	40	37	15	20
1	2	11	10	53	47	52	48	5	7	50
55	54	45	46	3	9	4	8	51	49	6

Abb. 3.38: Vollständig gefülltes Rechteck der Größe 5 x 11

Im nächsten Schritt werden die Spalten der Zahlen $d_1 = 1$, $d_2 = 23$, $d_3 = 54$ und $d_4 = 32$ gesucht. Der Austausch von d_1 und d_2 sowie d_3 und d_4 erzeugt dann das magische Rechteck aus Abbildung 3.39 mit den Zeilensummen 308 und den Spaltensummen 140.

18	36	12	34	19	42	35	14	21	38	39
1	54	44	17	24	29	27	30	26	31	25
43	16	28	33	41	13	22	40	37	15	20
23	2	11	10	53	47	52	48	5	7	50
55	32	45	46	3	9	4	8	51	49	6

Abb. 3.39: Magisches Rechteck der Größe 5 x 11 (Hagedorn)

3.3 Bier - Rogers

Thomas Bier und Douglas G. Rogers haben ein Verfahren vorgestellt, um magische Rechtecke $R(3, n)$ zu erzeugen, wenn die Anzahl der Spalten ungerade ist.[15] Sie unterscheiden drei Fälle für verschiedene Werte von n.

Sie bezeichnen die linke obere Ecke des Koordinatensystemes mit $(1, 1)$. Die Zeilen i werden damit von oben nach unten mit $1, 2, 3, \ldots$ und die Spalten j von links nach rechts mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet.

[15] Bier - Rogers [3]

Fall 1: n=6m-1

Zur Vereinfachung der Darstellung wird eine Konstante $c = j \bmod 6$ definiert. Für $m > 1$ und den Spalten $1 \leq j \leq 6m-6$ werden die Zahlen $r_{i,j}$ des Rechteckes mit den Termen aus Tabelle 8 berechnet.

$r_{1,j} = j$	$r_{2,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	$r_{3,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	für $c \equiv 1$
$r_{1,j} = 15\,m - 2 - \frac{j}{2}$	$r_{2,j} = j$	$r_{3,j} = 12\,m - 1 - \frac{j}{2}$	für $c \equiv 2$
$r_{1,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	$r_{2,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	$r_{3,j} = j$	für $c \equiv 3$
$r_{1,j} = 12\,m - 1 - \frac{j}{2}$	$r_{2,j} = 15\,m - 2 - \frac{j}{2}$	$r_{3,j} = j$	für $c \equiv 4$
$r_{1,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	$r_{2,j} = j$	$r_{3,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	für $c \equiv 5$
$r_{1,j} = j$	$r_{2,j} = 12\,m - 1 - \frac{j}{2}$	$r_{3,j} = 15\,m - 2 - \frac{j}{2}$	für $c \equiv 0$

Tab. 8: Terme für die Spalten $1 \leq j \leq 6m - 6$

Im Bereich der Spalten $6m - 5 \leq j \leq 6m - 1$ werden dagegen die Terme aus Tabelle 9 benutzt.

$r_{1,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	$r_{2,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	$r_{3,j} = j$	für $j = 6m - 5$
$r_{1,j} = 15\,m - 2 - \frac{j}{2}$	$r_{2,j} = j$	$r_{3,j} = 12\,m - 1 - \frac{j}{2}$	für $j = 6m - 4$
$r_{1,j} = j$	$r_{2,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	$r_{3,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	für $j = 6m - 3$
$r_{1,j} = j$	$r_{2,j} = 15\,m - 2 - \frac{j}{2}$	$r_{3,j} = 12\,m - 1 - \frac{j}{2}$	für $j = 6m - 2$
$r_{1,j} = 18\,m - 2 - \frac{j+1}{2}$	$r_{2,j} = j$	$r_{3,j} = 9\,m - \frac{j+1}{2}$	für $j = 6m - 1$

Tab. 9: Terme für die Spalten $6m - 5 \leq j \leq 6m - 1$

Besitzt das Rechteck beispielsweise $n = 6m - 1 = 5$ Spalten, gilt $m = 1$. Damit ergibt sich das magische Rechteck aus Abbildung 3.40, wobei nur Terme aus Tabelle 9 benutzt werden.

8	12	3	4	13
15	2	7	11	5
1	10	14	9	6

Abb. 3.40: Magisches Rechteck der Größe 3×5 (Bier - Rogers)

Für $n = 11$ gilt $m = 2$ und für diese Größe werden jetzt alle Terme benutzt. Die Zahlen für die Spalten $1 \leq j \leq 6m - 6 = 6$ werden mithilfe der Tabelle 8 berechnet, die Zahlen für die Spalten $6m - 5 \leq j \leq$

$6m-1$, also $7 \leq j \leq 11$, mit den Termen aus Tabelle 9. Das entstehende magische Rechteck $R(3, 11)$ ist in Abbildung 3.41 dargestellt.

1	27	16	21	31	6	14	24	9	10	28
17	2	32	26	5	20	30	8	13	23	11
33	22	3	4	15	25	7	19	29	18	12

Abb. 3.41: Magisches Rechteck der Größe 3 x 11 (Bier - Rogers)

Das nächstgrößere magische Rechteck, das mit diesen Termen erzeugt wird, ist das Rechteck $R(3, 17)$ mit $m = 3$. Dieses Rechteck wird in Abbildung 3.42 gezeigt.

1	42	25	33	49	6	7	39	22	30	46	12	20	36	15	16	43
26	2	50	41	5	32	23	8	47	38	11	29	45	14	19	35	17
51	34	3	4	24	40	48	31	9	10	21	37	13	28	44	27	18

Abb. 3.42: Magisches Rechteck der Größe 3 x 17 (Bier - Rogers)

Fall 2: n=6m+1

Für diese Anzahl von Spalten werden vier unterschiedliche Tabellen für die Berechnung der Zahlen benutzt.

Fall 2.1: $1 \leq j \leq 3m-2$

Für diese Spalten werden die Terme aus Tabelle 10 benutzt.

$$r_{i,j} = j \qquad r_{i+1,j} = 12m + 4 - 2j \qquad r_{i+2,j} = 15m + 2 + j$$

Tab. 10: Terme für die Spalten $1 \leq j \leq 3m-2$

Allerdings ist in diesem Fall eine Besonderheit zu beachten, da die Zeilennummern nicht fest definiert sind. Den Spaltennummern werden von links nach rechts immer zyklisch die Zeilennummern 1, 2, 3 zugeordnet. Also den Spaltennummern 1, 2, 3 die Zeilennummern 1, 2, 3, ebenso wieder die Spaltennummern 4, 5, 6 usw. Diese so zugeordnete Zeilennummer gibt die Startzeile i an, in der die erste berechnete Zahl $r_{i,j}$ dieser Spalte eingetragen wird. Die beiden weiteren Zahlen dieser Spalte werden dann zyklisch gesehen immer eine Zeile tiefer eingetragen.

Im Beispiel für $n = 6 \cdot 2 + 1 = 13$ Spalten tritt dieser Fall bei den Spalten 1 bis 4 ein. Der Spalte $j = 1$ wird die Startzeile 1 zugeordnet, sodass die erste der drei einzutragenden Zahlen in Zeile 1 und die anderen beiden Zahlen 26 und 33 in die beiden Zeilen darunter eingetragen werden. Der Spalte 2 ist die Startzeile 2 zugeordnet, sodass die erste Zahl 2 in die mittlere Zeile eingetragen wird und die anderen beiden zyklisch gesehen darunter. Der Spalte 3 wird die Startzeile 3 zugeordnet, sodass die drei Zahlen 3, 22 und 35 dieser Spalte in die Zeilen 3, 1 und 2 eingetragen werden. Für die Spalte 4 ergibt sich wieder die Startzeile 1, sodass die Zahlen 4, 20 und 36 in die Zeilen 1, 2 und 3 eingetragen werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	34	22	4									
2	26	2	35	20									
3	33	24	3	36									

Fall 2.2: $3m - 1 \leq j \leq 3m + 2$

Die Zahlen in diesen Spalten können direkt mit den nachfolgenden Termen berechnet werden.

$r_{1,j} = 6m + 6$	$r_{2,j} = 3m - 1$	$r_{3,j} = 18m + 1$	für $j = 3m - 1$
$r_{1,j} = 18m + 2$	$r_{2,j} = 6m + 4$	$r_{3,j} = 3m$	für $j = 3m$
$r_{1,j} = 6m + 2$	$r_{2,j} = 18m + 3$	$r_{3,j} = 3m + 1$	für $j = m + 1$
$r_{1,j} = 12m + 1$	$r_{2,j} = 3m + 2$	$r_{3,j} = 12m + 3$	für $j = m + 2$

Tab. 11: Terme für die Spalten $3m - 1 \leq j \leq 3m + 2$

Fall 2.3: $3m + 3 \leq j \leq 6m - 1$

Die Terme zur Berechnung der Zahlen für diese Spalten lauten

$$r_{i,j} = 9m + 1 + j \qquad r_{i+1,j} = 18m + 5 - 2j \qquad r_{i+2,j} = j$$

Tab. 12: Terme für die Spalten $3m + 3 \leq j \leq 6m - 1$

Allerdings sind die zugehörigen Zeilen nicht sofort ersichtlich. Die Spaltennummern werden wieder modulo 3 berechnet. Bei dem Ergebnis 0 werden die drei Zeilen dieser Spalte in der Reihenfolge $1, 2, 3$ gefüllt. Bei dem Ergebnis 1 lautet die Reihenfolge $3, 1, 2$ und sonst $2, 3, 1$. Auch hier ist eigentlich nur die Startzeile i der ersten Zahl wichtig, da die beiden weiteren Zahlen dieser Spalte auch wieder zyklisch eine Zeile tiefer eingetragen werden.[16]

Dieser Sonderfall tritt bei 13 Spalten für die Spalten 9, 10 und 11 ein. Für Spalte 9 gilt $10 \bmod 3 \equiv 0$, sodass die drei Zahlen 28, 23 und 9 in die Zeilen 1, 2 und 3 eingetragen werden. Für Spalte 10 gilt dagegen $10 \bmod 3 \equiv 1$, sodass die Zahlen 29, 21 und 10 in die Zeilen 3, 1 und 2 eingetragen werden müssen. Entsprechend werden die Zahlen der Spalte 11 in den Zeilen 2, 3 und 1 platziert.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1									28	21	11		
2									23	10	30		
3									9	29	19		

Fall 2.4: $6m \leq j \leq 6m + 1$

[16] die Terme wurden gegenüber dem Originalartikel so umgeordnet, dass die Zahlen auch hier innerhalb einer Spalte ausgegeben werden können

Dieser Fall betrifft nur die letzten beiden Spalten und es müssen keine Besonderheiten beachtet werden, sondern die einzutragenden Zahlen können direkt berechnet werden.

$r_{1,j} = 6m$	$r_{2,j} = 15m+1$	$r_{3,j} = 6m+5$	für $j = 6m$
$r_{1,j} = 15m+2$	$r_{2,j} = 6m+3$	$r_{3,j} = 6m+1$	für $j = 6m+1$

Tab. 13: Terme für die Spalten $6m \leq j \leq 6m+1$

Insgesamt ergibt sich das magische Rechteck aus Abbildung 3.43. Bei diesem Rechteck sind die Spalten für die vier Fälle besonders gekennzeichnet.

1	34	22	4	18	38	14	25	28	21	11	12	32
26	2	35	20	5	16	39	8	23	10	30	31	15
33	24	3	36	37	6	7	27	9	29	19	17	13

Abb. 3.43: Magisches Rechteck der Größe 3 x 13 (Bier - Rogers)

Das nächstgrößere magische Rechteck, das mit diesen Termen erzeugt wird, ist das Rechteck $R(3, 19)$ mit $m = 3$. Dieses Rechteck wird in Abbildung 3.44 gezeigt.

1	49	34	4	52	28	7	24	56	20	37	40	33	14	43	27	17	18	47
38	2	50	32	5	53	26	8	22	57	11	35	13	42	29	16	45	46	21
48	36	3	51	30	6	54	55	9	10	39	12	41	31	15	44	25	23	19

Abb. 3.44: Magisches Rechteck der Größe 3 x 19 (Bier - Rogers)

Fall 3: n ist ein Vielfaches von 3

Wenn die Anzahl der Spalten für ein magisches Rechteck $R(m, n)$ mit $n = 3s$ ein Vielfaches von 3 ist, muss das Rechteck völlig anders erzeugt werden. Bier und Rogers gehen von bestimmten ausgeglichenen magischen Rechtecken $R(m, s)$ aus (engl. *balanced magic rectangles*), die sich zu dem gewünschten Rechteck vervielfältigen lassen.

Hier wird mit einem Rechteck $R(3, 9)$, also $n = 3s = 3 \cdot 3 = 9$, begonnen, an dem der Prozess der Vervielfältigung wegen der überschaubaren Größenordnung besonders gut veranschaulicht werden kann.

Man benötigt ein magisches Ausgangsrechteck $R_0(3, 3)$ und erzeugt hieraus zwei weitere Rechtecke, bei denen die Zahlen um $3s = 9$ bzw. $6s = 18$ erhöht werden, wie es in Abbildung 3.45 dargestellt ist.

1	6	8
9	2	4
5	7	3

10	15	17
18	11	13
14	16	12

19	24	26
27	20	22
23	25	21

Abb. 3.45: $R_0(3, 3)$ und die Rechtecke mit den erhöhten Zahlen

Aus den neun Zahlen der entsprechenden Spalten dieser Rechtecke wird dann ein neues Rechteck gebildet, indem die drei Spalten von links nach rechts dort eingetragen werden. Aus der jeweils linken Spalte der drei Rechtecke aus Abbildung 3.45 ergibt sich damit das Rechteck S_1 in Abbildung 3.46.

1	6	8
9	2	4
5	7	3

10	15	17
18	11	13
14	16	12

19	24	26
27	20	22
23	25	21

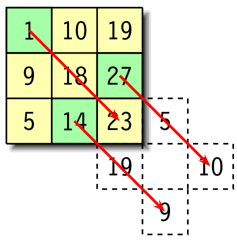
1	10	19
9	18	27
5	14	23

Abb. 3.46: Konstruktion des Rechteckes S_1

Diese Zahlen des Rechteckes S_1 werden dann in ein weiteres Rechteck R_1 übertragen. Man beginnt in der linken oberen Ecke und liest die drei Zahlen 1, 18 und 23 des Rechteckes S_1 diagonal nach rechts unten aus. Diese Zahlen bilden die obere Zeile des Rechteckes R_1.

Der neue Startpunkt der nächsten drei Zahlen erhält man, indem man vom letzten Startpunkt mit der Zahl 1 in S_1 zyklisch gesehen immer eine Zeile tiefer und eine Spalte nach links geht. In diesem Beispiel lautet der zweite Startpunkt damit 27 und es können die nächsten drei Zahlen 27, 5 und 10 wieder diagonal nach rechts unten ausgelesen und in die zweite Zeile von R_1 eingetragen werden.

Der dritte Startpunkt der verbliebenen Zahlenfolge lautet dann 14 und die Zahlen 14, 19 und 9 können wie in Abbildung 3.47 übertragen werden.



a) S_1

1	18	23
27	5	10
14	19	9

b) R_1

Abb. 3.47: Übertragen der Zahlen aus S_1 nach R_1

Dieses so konstruierte Hilfsrechteck R_1 besitzt die besondere Eigenschaft, dass alle Zeilen- und Spaltensummen gleich sind. Nun kann es in das Zielrechteck wie in Abbildung 3.49 an eine der Spaltenpositionen 1, $s+1$ oder $2s+1$ übertragen werden.

Ebenso verfährt man mit den Spalten 2 und 3 der Ausgangsrechtecke aus Abbildung 3.45 und erzeugt zunächst durch das Auslesen der entsprechenden Spalten die Rechtecke S_2 und S_3. Aus diesen werden die Zahlen wieder diagonal ausgelesen und die zugehörigen Rechtecke R_2 und R_3 gebildet, die wiederum alle die gleichen Zeilen- und Spaltensummen besitzen.

6	15	24
2	11	20
7	16	25

a) S_2

8	17	26
4	13	22
3	12	21

b) S_3

6	11	25
20	7	15
16	24	2

c) R_2

8	13	21
22	3	17
12	26	4

d) R_3

Abb. 3.48: Konstruktion der weiteren Rechtecke R_2 und R_3

Fügt man auch diese beiden Rechtecke in das Zielrechteck ein, erhält man das magische Rechteck aus Abbildung 3.49.

1	18	23	6	11	25	8	13	21
27	5	10	20	7	15	22	3	17
14	19	9	16	24	2	12	26	4
R_1			R_2			R_3		

Abb. 3.49: Magisches Rechteck der Größe 3 x 9 (Bier - Rogers)

Wie man deutlich erkennen kann, ist das ursprüngliche Rechteck R_0 vervielfältigt worden. Die Zeilensummen betragen damit $3 \cdot 42 = 126$ und die Spaltensummen 42.

Beispiel 3x15

Das Rechteck $R(3, 15)$ im nächsten Beispiel besitzt $3s = 3 \cdot 5 = 15$ Spalten. Für das Ausgangsrechteck $R_0(3, 5)$ wird jedoch nicht der etwas komplexere Vorschlag von Bier und Rogers befolgt, sondern ein beliebiges magisches Rechteck dieser Größe, das sich ja zum Beispiel mit dem in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahren für $n = 6m - 1$ erzeugen lässt.

Als Ausgangsrechteck $R_0(3, 5)$ von Seite 52 wird das Rechteck aus Abbildung 3.40 benutzt, wobei die Zahlen dieses Rechteckes für die zwei weiteren Rechtecke um $3s = 15$ bzw. $6s = 30$ erhöht werden.

8	12	3	4	13
15	2	7	11	5
1	10	14	9	6

23	27	18	19	28
30	17	22	26	20
16	25	29	24	21

38	42	33	34	43
45	32	37	41	35
31	40	44	39	36

Abb. 3.50: $R_0(3, 5)$ und die Rechtecke mit den erhöhten Zahlen

Jetzt geht man wieder wie beim vorangegangenen Beispiel vor. Die neun Zahlen aus den linken Spalten liefern das erste Rechteck S_1. Verfährt man ebenso mit den Spalten 2 bis 5, ergeben sich die Rechtecke aus Abbildung 3.51.

8	23	38
15	30	45
1	16	31

a) S_1

12	27	42
2	17	32
10	25	40

b) S_2

3	18	33
7	22	37
14	29	44

c) S_3

4	19	34
11	26	41
9	24	39

d) S_4

13	28	43
5	20	35
6	21	36

e) S_5

Abb. 3.51: Konstruktion der Rechtecke S_1 bis S_5

Aus diesen Rechtecken S_1 bis S_5 werden die Zahlen wieder diagonal ausgelesen und in die Zeilen der entsprechenden Rechtecke R_i eingetragen. Diese sind in Abbildung 3.52 dargestellt.

8	30	31
45	1	23
16	38	15

a) R_1

12	17	40
32	10	27
25	42	2

b) R_2

3	22	44
37	14	18
29	33	7

c) R_3

4	26	39
41	9	19
24	34	11

d) R_4

13	20	36
35	6	28
21	43	5

e) R_5

Abb. 3.52: Übertragen der Zahlen von S_i nach R_i

Alle fünf erhaltenen Rechtecke R_i besitzen die gleichen Zeilen- und Spaltensummen 69. Trägt man sie in ein Rechteck $R(3, 15)$ ein, muss dieses Rechteck wie in Abbildung 3.53 magisch sein. Die Zeilensummen betragen damit $5 \cdot 69 = 345$ und die Spaltensummen 69.

8	30	31	12	17	40	3	22	44	4	26	39	13	20	36
45	1	23	32	10	27	37	14	18	41	9	19	35	6	28
16	38	15	25	42	2	29	33	7	24	34	11	21	43	5
	R_1			R_2			R_3			R_4			R_5	

Abb. 3.53: Magisches Rechteck der Größe 3 x 15 (Bier - Rogers)

3.4 Chai - Das - Midha

Chai, Das und Midha haben ein Verfahren vorgestellt, mit dem sie magische Rechtecke $R(m, n)$ erzeugen, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten ungerade ist und zusätzlich n kein Vielfaches von 3 ist.[17] Wie bei allen vorgestellten Verfahren liegt der Ursprung $(1, 1)$ des Koordinatensystemes in der linken oberen Ecke. Ihre abweichenden Bezeichnungen mit p für die Anzahl der Zeilen und q für die Spalten werden hier beibehalten, da sonst bei den vielen Bezeichnungen der Komponenten ein Vergleich mit dem Originalartikel sehr schwerfallen würde.

Für ihre Konstruktion definieren sie zunächst einige Matrizen, wobei $q = 2q' - 1$ mit $q' \geq 1$ gilt.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q' & q'+1 & \cdots & q \\ q' & q'+1 & \cdots & q & 1 & \cdots & q'-1 \\ q & q-2 & \cdots & 1 & q-1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_u \\ R_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q-1 & q \\ q & q-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_u = \begin{pmatrix} q & q-2 & \cdots & 1 & q-1 & q-3 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & q' & q'+1 & q'+2 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

$$T_l = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & q & 2 & 4 & \cdots & q-1 \\ q & q-1 & \cdots & q' & q'-1 & q'-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Tab. 14: Definition der Matrizen S, R_u, R_l, T_u und T_l

Damit handelt es sich bei allen Zeilen dieser Matrizen um Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, q$, wobei sich die Spaltensummen von R, S, T_u und T_l mit $q+1$, $3\,\frac{q+1}{2}$, $q+1$ und $q+1$ ergeben.

[17] Chai - Das - Midha [4]

Neben diesen Matrizen wird eine weitere Matrix G benötigt, deren Definition mehrere Fälle unterscheidet.

$$p = 3 \qquad G_3 = S$$

$$p = 5 \qquad G_5 = \begin{pmatrix} R_u \\ S \\ R_l \end{pmatrix}$$

$$p > 5 \qquad G_p = \begin{cases} \begin{pmatrix} E_{p'1} \otimes T_u \\ S \\ E_{p'1} \otimes T_l \end{pmatrix} & \text{für } p = 4p' + 3 \\ \begin{pmatrix} R_u \\ G_{p-2} \\ R_l \end{pmatrix} & \text{für } p = 4p' + 5 \end{cases}$$

Tab. 15: Definition der Matrix G_p

Dabei bedeutet $E_{p'1}$ eine Matrix mit p' Zeilen und einer einzigen Spalte. Der Operator $\otimes$ stellt das in der Mathematik wohlbekannte Kronecker-Produkt dar. Für einige Werte von p' ist das Ergebnis des Kronecker-Produkts der beiden Matrizen $E_{p'1}$ und T_u in Tabelle 16 angegeben, sodass die Systematik in diesen Spezialfällen des Kronecker-Produkts zu erkennen ist.

p'	$E_{p'1} \otimes T_u$	Kronecker-Produkt
1	$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} T_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T_u \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} T_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T_u \\ T_u \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} T_u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T_u \\ T_u \\ T_u \end{pmatrix}$

Tab. 16: Kronecker-Produkt

Der Wert p' gibt also an, wie oft die Matrix T_u und damit auch T_l jeweils vervielfältigt werden müssen. Für $p = 4 \cdot 1 + 3 = 7$ und damit $p' = 1$ ergeben sich damit folgende Matrizen für G_7, G_9, G_{11} und G_{13}:

$$G_7 = \begin{pmatrix} T_u \\ S \\ T_l \end{pmatrix} \qquad G_9 = \begin{pmatrix} R_u \\ G_7 \\ R_l \end{pmatrix} \qquad G_{11} = \begin{pmatrix} T_u \\ T_u \\ S \\ T_l \\ T_l \end{pmatrix} \qquad G_{13} = \begin{pmatrix} R_u \\ G_9 \\ R_l \end{pmatrix}$$

Die Matrix G wird in eine Matrix H transformiert, wobei für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$ gilt:

$$h_{ij} = (g_{ij} - 1) \cdot p + i$$

Die Matrix H besitzt folgende Eigenschaften:

1. jede der Zahlen $1, 2, \ldots, pq$ tritt genau einmal auf
2. die Spaltensummen betragen $p \cdot \frac{pq+1}{2}$
3. die Zeilensumme einer Zeile i beträgt $pq \cdot \frac{q-1}{2} + qi$
4. für $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$ beträgt der Unterschied zwischen den Zeilen i und $p+1-i$ immer $q \cdot (p+1-2i)$
5. Die Zeilensumme der mittleren Zeile $\frac{p+1}{2}$ besitzt die geforderte Zeilensumme $q \cdot (\frac{pq+1}{2})$ für ein magisches Rechteck dieser Größe

Die Matrix H wird abschließend durch das Vertauschen von Komponenten in ein magisches Rechteck umgewandelt. Diese Vertauschungen lassen sich in vier Fälle unterteilen, wobei $l = \frac{q-p}{2}$ gilt.

1. $\frac{p-5}{4} = \left\lfloor \frac{p-5}{4} \right\rfloor$

   Hier wird zuerst wird ein Parameter y gesetzt, der in diesem und auch im zweiten Fall benutzt wird.

$$y = \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$$

   Dann werden einige Vertauschungen durchgeführt:

für $1 \leq j \leq y$	$h_{1,j}$ $h_{1,q+1-j}$	$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$	$h_{p,j}$ $h_{p,q+1-j}$
für $l = 2y+1$	$h_{1,\frac{2q+3-p}{4}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p,\frac{2q+3-p}{4}}$
für $l = 2y+2$	$h_{1,\frac{2q+3-p}{4}}$ $h_{1,\frac{q+1}{2}}$	$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$	$h_{p,\frac{2q+3-p}{4}}$ $h_{p,\frac{q+1}{2}}$

Tab. 17: Vertauschen von Zahlen im Fall 1

2. Der Parameter y wird wie in Fall 1 festgelegt. Dann werden in diesem Fall Zahlen in den Zeilen i und $p+1-i$ vertauscht, wobei i aus dem Intervall

$$\frac{p-1}{2} - 2 \cdot \left\lfloor \frac{p-3}{4} \right\rfloor \leq i \leq \frac{p-3}{2}$$

   stammt. Davon sind in Abhängigkeit von y folgende Zahlenpaare betroffen:

für $y > 0$ und $1 \leq j \leq y$	$h_{i,\frac{q+3}{2}-j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p+1-j,\frac{q+3}{2}-j}$
	$h_{i,\frac{q+1}{2}+j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p+1-j,\frac{q+1}{2}+j}$
für $l = 2y+1$	$h_{i,\frac{p+3}{2}-i}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p+1-i,\frac{p+3}{2}-i}$
für $l = 2y+2$	$h_{i,1}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p+1-i,1}$
	$h_{i,\frac{p+3}{2}-i}$	$\longleftrightarrow$	$h_{p+1-i,\frac{p+3}{2}-i}$

Tab. 18: Vertauschen von Zahlen im Fall 2

3. Der dritte Fall tritt bei der Gleichheit $\frac{q+1}{6} = \left\lfloor \frac{q+1}{6} \right\rfloor$ ein. In diesem Fall werden Zahlen in den Zeilen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+3}{2}$ vertauscht. Für die Berechnung von y gilt in diesem und auch im vierten Fall

$$y = \left\lfloor \frac{l-1}{4} \right\rfloor$$

für $y > 0$ und $1 \leq j \leq y$	$h_{\frac{p-1}{2},j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{6}+j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{6}+j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+3}{2}-j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+3}{2}-j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},(q+1)-j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},(q+1)-j}$
für $l = 4y+1$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{3}}$
für $l = 4y+2$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},2\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},2\frac{q+1}{3}}$
für $l = 4y+3$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q-1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q-1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+5}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+5}{3}}$
für $l = 4y+4$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q-1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q-1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+5}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+5}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},2\frac{q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},2\frac{q+1}{3}}$

Tab. 19: Vertauschen von Zahlen im Fall 3

4. Der vierte und letzte Fall tritt ein, wenn $\frac{q-1}{6} = \left\lfloor \frac{q-1}{6} \right\rfloor$ gilt. Dann werden auch wieder Zahlen in den Zeilen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+3}{2}$ vertauscht.

für $y > 0$ und $1 \leq j \leq y$	$h_{\frac{p-1}{2},j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+1}{2}+j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+1}{2}+j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{5q+7}{6}-j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{5q+7}{6}-j}$
	$h_{\frac{p-1}{2},(q+1)-j}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},(q+1)-j}$
für $l = 4y+1$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+1}{3}}$
für $l = 4y+2$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+2}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+2}{3}}$
für $l = 4y+3$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q-1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q-1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+5}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+5}{3}}$
für $l = 4y+4$	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q-1}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q-1}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+5}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+5}{3}}$
	$h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+2}{3}}$	$\longleftrightarrow$	$h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+2}{3}}$

Tab. 20: Vertauschen von Zahlen im Fall 4

Insgesamt sind dies viele scheinbar komplexe Vertauschungen, die sich aber gut durch einen Algorithmus realisieren lassen.

Beispiel 9x13

Als erstes Beispiel soll ein magisches Rechteck $R(9, 13)$ erzeugt werden, sodass sich hiermit $l = \frac{13-9}{2} = 2$ ergibt. Mit $p = 4 \cdot 1 + 5 = 9$ liegt für G_9 der untere Fall in der Definition von G_p vor. Damit muss zunächst G_7 berechnet werden, um dann die beiden oberen und unteren Zeilen des Zielrechteckes mit T_u und T_l aufzufüllen.

13	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	T_u
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	S
7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	
13	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	
1	3	5	7	9	11	13	2	4	6	8	10	12	T_l
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Abb. 3.54: Matrix G_7

Mit G_7 lässt sich dann die Matrix G_9 aus Abbildung 3.55 bestimmen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	R_u
13	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	G_7
13	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2	
1	3	5	7	9	11	13	2	4	6	8	10	12	
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	R_l

Abb. 3.55: Matrix G_9

Anschließend wird G_9 in die Matrix H_9 transformiert.

$$h_{ij} = (g_{ij} - 1) \cdot p + i$$

H_9 hat bereits die gewünschten Spaltensummen 531 und zusätzlich besitzt auch die mittlere Zeile schon die Zeilensumme 767.

1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109
110	92	74	56	38	20	2	101	83	65	47	29	11
3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
59	68	77	86	95	104	113	5	14	23	32	41	50
114	96	78	60	42	24	6	105	87	69	51	33	15
7	25	43	61	79	97	115	16	34	52	70	88	106
116	107	98	89	80	71	62	53	44	35	26	17	8
117	108	99	90	81	72	63	54	45	36	27	18	9

Abb. 3.56: Matrix H_9

Jetzt werden der Reihe nach die vier Fälle für die Vertauschungen überprüft. Die Bedingungen für den Fall 1 treffen in diesem Beispiel zu und y wird mit $y = \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor = 0$ berechnet. Von den drei möglichen Bedingungen für diesen Fall gilt $l = 2y + 2$ und es werden zwei Vertauschungen in den Zeilen 1 und p durchgeführt.

$$h_{1,\frac{2q+3-p}{4}} \longleftrightarrow h_{p,\frac{2q+3-p}{4}} \qquad\qquad h_{1,5} \longleftrightarrow h_{9,5}$$

$$h_{1,\frac{q+1}{2}} \longleftrightarrow h_{p,\frac{q+1}{2}} \qquad\qquad h_{1,7} \longleftrightarrow h_{9,7}$$

Damit werden die Zahlen in den Zeilen 1 und 9 und den Spalten 5 und 7 vertikal symmetrisch vertauscht.[18]

Auch die Bedingung für den zweiten Fall der Vertauschungen ist erfüllt. Hier werden Zahlen aus den Zeilen 1 und $p+1-i$ vertauscht, wobei sich die Grenzen des Bereiches für i nach der angegebenen Formel berechnen lassen.

$$\begin{array}{rcccl} \frac{p-1}{2} - 2 \cdot \left\lfloor \frac{p-3}{4} \right\rfloor & \leq & i & \leq & \frac{p-3}{2} \\ 4 - 2 \cdot 1 & \leq & i & \leq & 3 \\ 2 & \leq & i & \leq & 3 \end{array}$$

Es sind also die Zeilen 2 und 3 betroffen. Mit $l = 2y+2$ ergeben sich damit insgesamt vier Vertauschungen.[19]

$$\begin{array}{ccc} h_{i,1} & \longleftrightarrow & h_{p+1-i,1} \\ h_{i,\frac{p+3}{2}-i} & \longleftrightarrow & h_{p+1-i,\frac{p+3}{2}-i} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} h_{2,1} & \longleftrightarrow & h_{8,1} \\ h_{2,4} & \longleftrightarrow & h_{8,4} \\ h_{3,1} & \longleftrightarrow & h_{7,1} \\ h_{3,3} & \longleftrightarrow & h_{7,3} \end{array}$$

Weiterhin ist auch die Bedingung für den vierten Fall der Vertauschungen erfüllt. Mit $l = 4y+2$ müssen zwei weitere Vertauschungen durchgeführt werden.[20]

$$\begin{array}{ccc} h_{\frac{p-1}{2},\frac{2q+1}{3}} & \longleftrightarrow & h_{\frac{p+3}{2},\frac{2q+1}{3}} \\ h_{\frac{p-1}{2},\frac{q+2}{3}} & \longleftrightarrow & h_{\frac{p+3}{2},\frac{q+2}{3}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} h_{4,9} & \longleftrightarrow & h_{6,9} \\ h_{4,5} & \longleftrightarrow & h_{6,5} \end{array}$$

Mit diesen Vertauschungen entsteht das magische Rechteck $R(9, 13)$, welches in Abbildung 3.57 dargestellt ist. Die Zeilensummen betragen 767 und die Spaltensummen 531.

1	10	19	28	81	46	63	64	73	82	91	100	109
116	92	74	89	38	20	2	101	83	65	47	29	11
7	12	43	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111
4	13	22	31	42	49	58	67	87	85	94	103	112
59	68	77	86	95	104	113	5	14	23	32	41	50
114	96	78	60	40	24	6	105	76	69	51	33	15
3	25	21	61	79	97	115	16	34	52	70	88	106
110	107	98	56	80	71	62	53	44	35	26	17	8
117	108	99	90	37	72	55	54	45	36	27	18	9

Abb. 3.57: Magisches Rechteck der Größe 9 x 13 (Chai-Das-Midha)

[18] in Abbildung 3.57 werden diese Zellen grün markiert
[19] in Abbildung 3.57 werden diese Zellen blau markiert
[20] in Abbildung 3.57 werden diese Zellen rot markiert

Beispiel 11x19

Als zweites Beispiel soll das magische Rechteck $R(11, 19)$ erzeugt werden, damit die Vertauschungen noch verständlicher werden. Mit $p = 11$ und $q = 19$ gilt $l = \frac{q-p}{2} = \frac{19-11}{2} = 4$ und G_{11} muss mit dem ersten Fall der Definition von G_p bestimmt werden.

19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	18	16	14	12	10	8	6	4	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	18	16	14	12	10	8	6	4	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	18	16	14	12	10	8	6	4	2
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	2	4	6	8	10	12	14	16	18
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	2	4	6	8	10	12	14	16	18
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Abb. 3.58: Matrix G_{11}

Dann wird G_{11} in die Matrix H_{11} transformiert. Diese Matrix hat bereits wie immer die gewünschten Spaltensummen 1155 und zusätzlich besitzt auch die mittlere Zeile schon die Zeilensumme 1995.

199	177	155	133	111	89	67	45	23	1	188	166	144	122	100	78	56	34	12
2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	112	123	134	145	156	167	178	189	200
201	179	157	135	113	91	69	47	25	3	190	168	146	124	102	80	58	36	14
4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	114	125	136	147	158	169	180	191	202
5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	126	137	148	159	170	181	192	203
105	116	127	138	149	160	171	182	193	204	6	17	28	39	50	61	72	83	94
205	183	161	139	117	95	73	51	29	7	194	172	150	128	106	84	62	40	18
8	30	52	74	96	118	140	162	184	206	19	41	63	85	107	129	151	173	195
207	196	185	174	163	152	141	130	119	108	97	86	75	64	53	42	31	20	9
10	32	54	76	98	120	142	164	186	208	21	43	65	87	109	131	153	175	197
209	198	187	176	165	154	143	132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11

Abb. 3.59: Matrix H_{11}

Nun wird überprüft, welche Bedingungen für die vier Fälle der durchzuführenden Vertauschungen zutreffen. In diesem Beispiel wird Fall 1 übersprungen und man beginnt mit Fall 2, wobei $y = \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor = 1$ gilt. Für die beteiligten Zeilen i ergibt sich der Bereich

$$
\begin{aligned}
\tfrac{p-1}{2} - 2 \cdot \left\lfloor \tfrac{p-3}{4} \right\rfloor \quad &\leq \quad i \quad \leq \quad \tfrac{p-3}{2} \\
5 - 2 \cdot 2 \quad &\leq \quad i \quad \leq \quad 4 \\
1 \quad &\leq \quad i \quad \leq \quad 4
\end{aligned}
$$

Damit trifft die erste Bedingung zu und es werden acht Vertauschungen für $1 \leq i \leq 4$ durchgeführt.

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
h_{1,10} & \longleftrightarrow & h_{11,10} & h_{3,10} & \longleftrightarrow & h_{9,10} \\
h_{1,11} & \longleftrightarrow & h_{11,11} & h_{3,11} & \longleftrightarrow & h_{9,11} \\
h_{2,10} & \longleftrightarrow & h_{10,10} & h_{4,10} & \longleftrightarrow & h_{8,10} \\
h_{2,11} & \longleftrightarrow & h_{10,11} & h_{4,11} & \longleftrightarrow & h_{8,11}
\end{array}
$$

Zusätzlich trifft hier aber auch noch die dritte Bedingung $l = 2y + 2$ zu, sodass vier weitere Vertauschungen durchgeführt werden müssen.[21]

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
h_{1,1} & \longleftrightarrow & h_{11,1} & h_{3,1} & \longleftrightarrow & h_{9,1} \\
h_{1,6} & \longleftrightarrow & h_{11,6} & h_{3,4} & \longleftrightarrow & h_{9,4} \\
h_{2,1} & \longleftrightarrow & h_{10,1} & h_{4,1} & \longleftrightarrow & h_{8,1} \\
h_{2,5} & \longleftrightarrow & h_{10,5} & h_{4,3} & \longleftrightarrow & h_{8,3}
\end{array}
$$

Neben dem Fall 2 erfüllt aber auch Fall 4 die festgelegten Bedingungen, sodass mit $l = 4y + 4$ vier weitere Vertauschungen durchgeführt werden müssen.

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
h_{5,13} & \longleftrightarrow & h_{7,13} & h_{5,8} & \longleftrightarrow & h_{7,8} \\
h_{5,6} & \longleftrightarrow & h_{7,6} & h_{5,7} & \longleftrightarrow & h_{7,7}
\end{array}
$$

Insgesamt ergibt sich mit diesen Vertauschungen das magische Rechteck $R(11, 19)$ aus Abbildung 3.60. Die Zeilensummen betragen 1995 und die Spaltensummen 1155.

209	177	155	133	111	154	67	45	23	110	99	166	144	122	100	78	56	34	12
10	13	24	35	98	57	68	79	90	208	21	123	134	145	156	167	178	189	200
207	179	157	174	113	91	69	47	25	108	97	168	146	124	102	80	58	36	14
8	15	52	37	48	59	70	81	92	206	19	125	136	147	158	169	180	191	202
5	16	27	38	49	95	73	51	93	104	115	126	150	148	159	170	181	192	203
105	116	127	138	149	160	171	182	193	204	6	17	28	39	50	61	72	83	94
205	183	161	139	117	60	71	82	29	7	194	172	137	128	106	84	62	40	18
4	30	26	74	96	118	140	162	184	103	114	41	63	85	107	129	151	173	195
201	196	185	135	163	152	141	130	119	3	190	86	75	64	53	42	31	20	9
2	32	54	76	46	120	142	164	186	101	112	43	65	87	109	131	153	175	197
199	198	187	176	165	89	143	132	121	1	188	88	77	66	55	44	33	22	11

Abb. 3.60: Magisches Rechteck der Größe 11 x 19 (Chai-Das-Midha)

[21] in Abbildung 3.57 werden alle Zellen für diesen Fall 2 grün markiert

Literatur

[1] Andrews, William Symes. *Magic Squares and Cubes*. 2. Edition. unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1917. Dover-Publications Inc., 1960.

[2] Bier, Thomas und Kleinschmidt, Axel. „Centrally symmetric and magic rectangles". In: *Discrete Mathematics* 176 (Nov. 1997), S. 29–42.

[3] Bier, Thomas und Rogers, Douglas. „Balanced Magic Rectangles". In: *Eur. J. Comb.* 14 (Juli 1993), S. 285–299.

[4] Chai, Feng, Das, Ashish und Midha, Chand. „Construction of magic rectangles of odd order". In: *The Australasian Journal of Combinatorics* 55 (Jan. 2013), S. 131–144.

[5] Danielsson, Holger. *Magische Quadrate*. Web-published document, URL: `https://www.magic-squares.info/info/buch.html` (2022, letzter Zugriff: 8.11.2022).

[6] Evans, Anthony. „Magic rectangles and modular magic rectangles". In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 51 (Apr. 1996), S. 171–180.

[7] Froncek, Dalibor. „Magic rectangle sets of odd order". In: *Australasian Journal of Combinatorics* 67 (Jan. 2017), S. 345–351.

[8] Hagedorn, Thomas. „Magic rectangles revisited". In: *Discrete Mathematics* 207 (Sep. 1999), S. 65–72.

[9] Hagedorn, Thomas. „On the existence of magic -dimensional rectangles". In: *Discrete Mathematics* 207 (Sep. 1999), S. 53–63.

[10] Hakopian, Yuri, Eloyan, Ani und Khachatryan, Edward. „About magic rectangles". In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 37 (Juni 2006), S. 475–483.

[11] Harmuth, T. „Über magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren". In: *Arch. Math. Phys.* 66 (Sep. 2022), S. 286–313.

[12] Harmuth, T. „Über magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen". In: *Arch. Math. Phys.* 66 (Sep. 2022), S. 413–447.

[13] Jacroux, Mike. „A note on constructing magic rectangles of even order". In: *Ars Combinatoria* 36 (Jan. 1993).

[14] Mani, K. und Viswambari, M. „A New Method of Generating Optimal Addition Chain Based on Graph". In: *International Journal of Mathematical Sciences and Computing* 3 (Apr. 2017), S. 37–54.

[15] Midha, Chand und Vellaisamy, Palaniappan. „On a method to construct Magic rectangles of even order". In: *Utilitas Mathematica* 80 (Nov. 2009).

[16] Phillips, J. „Methods of Constructing One-Way and Factorial Designs Balanced for Trend". In: *Applied Statistics* 17 (Jan. 1968), S. 162.

[17] Phillips, J.P.N. „A Simple Method of Constructing Certain Magic Rectangles of Even Order". In: *journalId:00000152* 52 (Feb. 1968).

[18] Planck, C. „The Construction of Magic Squares and Rectangles by the Method of Complementary Differences". In: *The Monist* 20.3 (1912). siehe Andrews [1], S. 434–444.

[19] Reyes, J.P., Das, Ashish und Midha, Chand. „A matrix approach to construct magic rectangles of even order". In: *The Australasian Journal of Combinatorics [electronic only]* 40 (Jan. 2008).

[20] Sesiano, Jacques. „Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit. I". In: *Sudhoffs Archiv* 64.2 (1980), S. 187–196.

[21] Sesiano, Jacques. *Les carrés magiques dans les pays islamiques*. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.

[22] Tannery, Paul. „Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques". In: *Mémoires scientifiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1886, S. 88–118.

[23] Trenkler, Marián. „Magic Rectangles". In: *The Mathematical Gazette* 83 (März 1999), S. 102–105.

[24] Wallis, W.D. *Magic Graphs*. Jan. 2001. ISBN: 978-0-8176-4252-5.

[25] Zhang, Yong und Lei, Jianguo. „Multimagic rectangles based on large sets of orthogonal arrays“. In: *Discrete Mathematics* 313 (Sep. 2013), S. 1823–1831.

[26] Zhou, Chen, Li, Wen, Zhang, Yong u. a. „Existence of centre-complementary magic rectangles“. In: *Discrete Mathematics* 341 (Juli 2018), S. 1952–1958.